

Devoir surveillé du Samedi 7 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Étudier, suivant la parité de n , les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_n(x) = x^{n+1} + x^n$.
 (b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$.
 (c) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de n , le nombre de solutions de l'équation $x^{n+1} + x^n = 2$ d'inconnue x .
2. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
 (b) Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$
 (a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener de manière équivalente à la réalisation de l'équation d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$
 (b) Soit Y une solution de (E'_n) . Montrer que $DY = YD$.
 (c) On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que $b = c = 0$.
 (d) Quelles sont les valeurs possibles de a ?
 (e) Discuter, suivant la parité de n , le nombre de solutions de l'équation (E_n) .
4. On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$.
 Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α .

Exercice 2

Soient $a \in]0, 1]$ et $b \in \mathbb{R}$.

On cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = ax + b.$$

1. Montrer que, pour tout réel x , $f(ax + b) = af(x) + b$.
2. En déduire que, pour tout réel x , $f'(ax + b) = f'(x)$.
3. Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
 Montrer que (u_n) est convergente de limite $\ell = \frac{b}{1-a}$.
4. Montrer que f' est constante.
5. En déduire l'expression de f et conclure.
6. Que faire si $a \in]1, +\infty[$?

Exercice 3

On admettra dans la suite l'irrationalité de $\sqrt{7}$.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Partie I. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

1. Prouver que pour tout élément x de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{7}$.
L'élément $a - b\sqrt{7}$ est alors appelé le *conjugué* de x et noté $\bar{x}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles des réels est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Est-ce un corps ?
3. Montrer que l'application $x \mapsto \bar{x}$ est un automorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
4. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, on appelle *norme* de x et on note $N(x)$ le réel $x\bar{x}$.
 - (a) Prouver que pour tout $(x, x') \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]^2$, $N(xx') = N(x)N(x')$.
 - (b) En déduire qu'un élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ si, et seulement si, $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$. Exprimer alors cet inverse en fonction de $\bar{x}$.

Partie II. Structure du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et équations de Pell-Fermat.

Dans la suite, on note G le groupe (multiplicatif) des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, c'est-à-dire $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{7}])$. Il est évident que 1 et -1 sont dans G .

5. Vérifier que $8 + 3\sqrt{7} \in G$, et en déduire que $G \neq \{-1, 1\}$.
6. On souhaite montrer que $G \cap]1, +\infty[$ possède un plus petit élément u .
 - (a) Soit $x = (a + b\sqrt{7}) \in G \cap]1, +\infty[$ tel que $N(x) = 1$. Justifier que $0 < \bar{x} < x$, puis montrer que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.
 - (b) Montrer de manière analogue que si $x = (a + b\sqrt{7}) \in G \cap]1, +\infty[$ est tel que $N(x) = -1$, alors $a \geq 1$ et $b \geq 1$.
 - (c) Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que $G \cap]1, M]$ est fini.
 - (d) Conclure.
7. Soit $v \in G \cap]1, +\infty[$.
 - (a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k \leq v < u^{k+1}$.
 - (b) Montrer que si k est comme dans la question précédente, alors $v = u^k$.
 - (c) En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^* = \langle u \rangle = \{u^k, k \in \mathbb{Z}\}$.
8. Montrer que $f : \begin{cases} \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ (\varepsilon, k) & \longmapsto & \varepsilon u^k \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes, où $\{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$ est muni de la structure de produit direct des deux groupes $(\{-1, 1\}, \times)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.
9. **Équations de Pell-Fermat.**
 - (a) Montrer que l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ possède une infinité de solutions. Donner deux telles solutions avec $x, y \in \mathbb{N}^*$.
 - (b) En admettant que $8 + 3\sqrt{7}$ est le plus petit élément de $G \cap]1, +\infty[$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 7y^2 = -1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 4

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$.
(b) En déduire que pour tout entier n , $u_n \leq n + \frac{u_0}{2n}$, puis que $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^2)$.
(c) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.
(d) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \sqrt{n}$.
(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
(b) En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.
 4. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1})$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
-