

Devoir surveillé du Samedi 4 Avril

Exercice 1

1. Par définition,

$$f(x) = (\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch}(x))}$$

Donc f est définie pour tout réel x tel que $\operatorname{ch}(x) > 0$ (toujours vraie) et $x \neq 0$.

Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. (a) D'après le cours, $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

(b) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ch}(x) - 1 = 0$, en écrivant $\ln(\operatorname{ch}(x)) = \ln(1 + (\operatorname{ch}(x) - 1))$, on peut utiliser le théorème de composition de développement limité en utilisant

$$\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

où on remplace X par la partie régulière du développement limité de $\operatorname{ch}(x) - 1$. On obtient :

$$\frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch}(x)) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = \frac{x}{2} + o(x^2).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch}(x)) = 0$, on peut donc à nouveau utiliser le théorème de composition de développement limité en remplaçant X par la partie régulière du développement limité de $\frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch}(x))$ dans celui de e^X :

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

On obtient finalement :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

(c) Avec le développement limité de f , on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

(d) Toujours avec le développement limité de f , on déduit que la tangente T_0 à \mathcal{C}_f a pour équation : $y = 1 + \frac{1}{2}x$

De plus, $f(x) - (1 + \frac{1}{2}x) = \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{8}x^2 > 0$ au voisinage de 0.

Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de T_0 au voisinage de 0.

Exercice 2 (Inégalités de convexité)

1. (a) Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = y_1 \varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2 \varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Et par ailleurs, $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2) \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right)$. Posons $\lambda = \frac{y_2}{y_1 + y_2} \in [0, 1]$, de sorte que $1 - \lambda = \frac{y_1}{y_1 + y_2}$. Alors :

$$\varphi\left(\left(1 - \lambda\right)\frac{x_1}{y_1} + \lambda\frac{x_2}{y_2}\right) = \varphi\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2} + \frac{x_2}{y_1 + y_2}\right) = \frac{1}{y_1 + y_2} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Par concavité de φ :

$$\varphi\left(\frac{x_1}{y_1+y_2} + \frac{x_2}{y_1+y_2}\right) \geq \frac{y_1}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Et donc après multiplication par $y_1 + y_2$, $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq y_1\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$, soit encore

$$\boxed{f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}.$$

(b) C'est une simple récurrence.

2. (a) La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = -\frac{1}{4t^{3/2}} < 0.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi : t \mapsto \sqrt{t} \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*}$.

(b) La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est concave, donc par ce qui précède, pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$, il vient

$$\sum_{k=1}^n y_k \sqrt{\frac{x_k}{y_k}} \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n y_k}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k y_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k}$$

En particulier, si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des réels strictement positifs, alors en posant $x_k = a_k^2$ et $y_k = b_k^2$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}}.$$

Exercice 3

1. (a) On a :

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \{aJ + bK \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(J, K),$$

donc $\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

La famille (J, K) est génératrice de \mathcal{N} . Elle est également libre car J et K sont deux vecteurs non colinéaires. Donc $\boxed{(J, K) \text{ est une base de } \mathcal{N} \text{ et } \mathcal{N} \text{ est de dimension } 2}$.

(b) Soient A et B deux matrices appartenant à \mathcal{N} . Comme (J, K) est une base de \mathcal{N} , il existe des (uniques) réels a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $A = a_1J + a_2K$ et $B = b_1J + b_2K$. Alors :

$$AB = (a_1J + a_2K)(b_1J + b_2K) = a_1b_1J^2 + a_1b_2JK + a_2b_1KJ + b_1b_2K^2 = a_1b_1K \in \mathcal{N},$$

car $J^2 = K$ et $JK = KJ = K^2 = 0$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{N} \text{ est bien stable par produit matriciel}}$.

(c) En reprenant les calculs précédents, on a :

$$AB = a_1b_1K = b_1a_1K = BA.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les matrices de } \mathcal{N} \text{ commutent deux à deux}}$.

- (d) Soient A, B et C trois matrices appartenant à \mathcal{N} . En décomposant dans la base (J, K) comme aux questions précédentes, on a :

$$ABC = \underbrace{(a_1J + a_2K) \times (b_1J + b_2K)}_{=a_1b_1K} \times (c_1J + c_2K) = a_1b_1c_1 \underbrace{KJ}_{=0} + a_1b_1c_2 \underbrace{K^2}_{=0} = 0.$$

Ainsi, le produit de trois matrices appartenant à \mathcal{N} est toujours nul.

2. (a) La matrice nulle n'appartient pas à \mathcal{J} donc \mathcal{J} n'est pas un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
 (b) Soient $I + N$ et $I + N'$ deux matrices appartenant à \mathcal{J} , avec N et N' appartenant à \mathcal{N} . Alors :

$$(I + N)(I + N') = I + N + N' + NN'.$$

La stabilité de \mathcal{N} pour la multiplication implique que $NN' \in \mathcal{N}$. Puisque \mathcal{N} est un espace vectoriel, $N + N' + NN' \in \mathcal{N}$. Donc, par définition de \mathcal{J} , $I + N + N' + NN' \in \mathcal{J}$.

On a bien prouvé que \mathcal{J} est stable par produit matriciel.

3. (a) Soit $N \in \mathcal{N}$. Alors $N^2 \in \mathcal{N}$ car \mathcal{N} est stable par produit matriciel. Donc $N + \frac{1}{2}N^2 \in \mathcal{N}$ car \mathcal{N} est un espace vectoriel. On a alors :

$$E(N) = I + N + \underbrace{\frac{1}{2}N^2}_{\in \mathcal{N}} \in \mathcal{J}.$$

On a ainsi démontré que $E(\mathcal{N}) \subset \mathcal{J}$.

- (b) Soient A et B deux matrices de \mathcal{N} . Alors :

$$\begin{aligned} E(A) \times E(B) &= \left(I + A + \frac{1}{2}A^2 \right) \times \left(I + B + \frac{1}{2}B^2 \right) \\ &= I + B + \frac{1}{2}B^2 + A + AB + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{4}A^2B^2. \end{aligned}$$

Comme $A, B \in \mathcal{N}$, $AB^2 = A^2B = A^2B^2 = 0$ (question 1.(f)).

Donc

$$E(A) \times E(B) = I + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2).$$

Comme $AB = BA$ car A et B appartiennent à \mathcal{N} (question 1.(e)), on a alors :

$$E(A) \times E(B) = I + (A + B) + \frac{1}{2}(A + B)^2.$$

On peut ainsi conclure que $E(A) \times E(B) = E(A + B)$.

- (c) Soit $A \in \mathcal{N}$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $(E(A))^n = E(nA)$ ".

I $(E(A))^0 = I$ et $E(0 \times A) = E(0) = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n + 1)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité et la question précédente à la troisième :

$$(E(A))^{n+1} = (E(A))^n \times E(A) = E(nA) \times E(A) = E(nA + A) = E((n + 1)A).$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(E(A))^n = E(nA)$.

(d) Avec la question 3.(c), on a :

$$E(A) \times E(-A) = E(A - A) = E(0) = I.$$

Donc $E(A)$ est inversible et $(E(A))^{-1} = E(-A)$.

4. (a) Soit $I + N$ une matrice appartenant à \mathcal{J} , avec $N \in \mathcal{N}$. Alors :

$$L(I + N) = (I + N) - I - \frac{1}{2}((I + N) - I)^2 = N - \frac{1}{2}N^2 \in \mathcal{N},$$

car \mathcal{N} est un espace vectoriel qui est stable par produit (questions 1.(a) et 1.(d)).

On a ainsi démontré que $L(\mathcal{J}) \subset \mathcal{N}$.

(b) Remarquons tout d'abord que les composées $L \circ E$ et $E \circ L$ existe bien d'après les questions 3.(b) et 4.(b). Soit $N \in \mathcal{N}$.

• D'une part, on a :

$$\begin{aligned} (L \circ E)(N) &= L(E(N)) = L\left(I + N + \frac{1}{2}N^2\right) \\ &= \left(I + N + \frac{1}{2}N^2\right) - I - \frac{1}{2}\left(\left(I + N + \frac{1}{2}N^2\right) - I\right)^2 \\ &= N + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}\left(N + \frac{1}{2}N^2\right)^2 = N + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}\left(N^2 + N^3 + \frac{1}{4}N^4\right) \\ &= N + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N^2 = N, \end{aligned}$$

en utilisant la question 1.(f) pour simplifier.

• D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} (E \circ L)(I + N) &= E(L(I + N)) = E\left(N - \frac{1}{2}N^2\right) \\ &= I + \left(N - \frac{1}{2}N^2\right) + \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{2}N^2\right)^2 \\ &= I + N - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}\left(N^2 - N^3 + \frac{1}{4}N^4\right) \\ &= I + N - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N^2 = I + N, \end{aligned}$$

en utilisant encore la question 1.(f) pour simplifier.

On a ainsi démontré que $L \circ E = Id_{\mathcal{N}}$ et $E \circ L = Id_{\mathcal{J}}$.

Les applications E et L sont donc bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 4 (Approximation d'une fonction \mathcal{C}^n sur un segment par des polynômes)

Partie I. Résultats préliminaires

1. Considérons le polynôme $R = P - Q$. Il admet une infinité de racines puisque pour tout $t \in [-1, 1]$, $R(t) = P(t) - Q(t) = 0$. Ainsi, $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$, de sorte que $P = Q$.
2. La fonction $g = |f|$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ en tant que composée de fonctions qui le sont. Par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum sur $[-1, 1]$, ce qui justifie l'existence de $\max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$.

Partie II. Polynômes de Tchebychev

3. Pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\boxed{T_0(x) = \cos(0) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x.}$$

4. Commençons par un rappel.

Rappel. Une formule de trigonométrie.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Cette formule peut par exemple se retrouver en passant par les complexes comme suit :

$$\begin{aligned} \cos(a) + \cos(b) &= \operatorname{Re}\left(e^{ia} + e^{ib}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}} 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$. Calculons, à l'aide de la formule de trigonométrie ci-dessus :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) + T_n(x) &= \cos((n+2)\arccos(x)) + \cos(\arccos(x)) \\ &= 2 \cos\left(\frac{(n+2)\arccos(x) + n\arccos(x)}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2)\arccos(x) - n\arccos(x)}{2}\right) \\ &= 2 \cos((n+1)\arccos(x)) \cos(\arccos(x)) \quad \boxed{= 2xT_{n+1}(x)}. \end{aligned}$$

5. Soit $x \in [-1, 1]$. D'après la formule de récurrence précédente :

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) \quad \boxed{= 2x^2 - 1}$$

et

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2(2x^3 - x) - x \quad \boxed{= 4x^3 - 3x.}$$

6. Montrons par récurrence (double) sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " T_n est une fonction polynomiale".

I Puisque $T_0 : x \mapsto 1$ et $T_1 : x \mapsto x$ sont polynomiales, les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Donc T_{n+2} est bien une fonction polynomiale en tant que somme et produit de fonctions polynomiales. D'où la propriété $\mathcal{P}(n+2)$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{T_n \text{ est une fonction polynomiale pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

7. Montrons par récurrence (double encore) sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $\deg(T_n) = n$ et $\operatorname{CD}(T_n) = 2^{n-1}$ ", où $\operatorname{CD}(P)$ désigne le coefficient dominant du polynôme non nul P .

I Puisque $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$, on obtient $\deg(T_1) = 1$ et $\operatorname{CD}(T_1) = 1 = 2^0$, et $\deg(T_2) = 2$ et $\operatorname{CD}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi les propriétés $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.

Tout d'abord $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n)$ par la question 4. Or, $\deg(2XT_n) = \deg(X) + \deg(T_{n+1}) = n + 2$ qui est strictement supérieur à $n = \deg(T_n)$. Ainsi :

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_n) = n + 2.$$

De plus, comme $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$:

$$\text{CD}(T_{n+2}) = \text{CD}(2XT_{n+1}) = 2\text{CD}(XT_{n+1}) = 2\text{CD}(T_{n+1}) \stackrel{\text{HR}}{=} 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 2$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\deg(T_n) = n \text{ et } \text{CD}(T_n) = 2^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$. Par ailleurs, on notera que $\deg(T_0) = 0$ et $\text{CD}(T_0) = 1$.

8. Montrons par récurrence (double) sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " T_n est de même parité que n ".

I Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.

Par hypothèse de récurrence, $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(X)$ et $T_n(X) = (-1)^nT_n(X)$, D'où :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^nT_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(2XT_{n+1} - T_n) \\ &= (-1)^{n+2}T_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc T_{n+2} est de même parité que $n + 2$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n + 2)$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{T_n \text{ est de la parité de } n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

9. (a) Pour tout $\theta \in [0, \pi]$:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n \arccos(\cos(\theta))) = \boxed{\cos(n\theta)}.$$

(b) Soit $\theta \in [0, \pi]$. Alors :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{\theta \in [0, \pi]} \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc $\boxed{\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide des questions 9.(a) et 9.(b), pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$T_n \left(\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right) = \cos \left(n \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = 0.$$

Les réels $\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$ sont donc racines de T_n pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ils sont de plus deux à deux distincts car $0 \leq \frac{\pi}{2n} < \frac{3\pi}{2n} < \dots < \frac{(2n-1)\pi}{2n} \leq \pi$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$ (car strictement décroissante).

On vient ici d'expliciter $n = \deg(T_n)$ racines distinctes de T_n . Le polynôme T_n n'a donc pas d'autres racines, et ses racines sont exactement les $\boxed{\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Comme elles sont toutes réelles, $\boxed{T_n \text{ est scindé sur } \mathbb{R}}$.

- (d) Puisque T_n admet n racines réelles distinctes et est de degré n , toutes ses racines sont simples (de multiplicité égale à 1). Comme le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} , T_n se factorise en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right).$$

- (e) Par les relations coefficients-racines, en notant $p_0 = T_n(0)$ et $p_n = \text{CD}(T_n)$:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = (-1)^n \frac{p_0}{p_n}.$$

On connaît $p_n = 2^{n-1}$. Reste à calculer p_0 :

$$p_0 = T_n \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Partie III. Minoration de la norme infinie sur $\mathbb{R}_n[X]$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$|T_n(x)| = |\cos(n \arccos(x))| \leq 1, \quad \text{et donc} \quad \|T_n\|_\infty \leq 1.$$

D'autre part, $|T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1$ et donc $\|T_n\|_\infty \geq 1$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty = 1$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V_n = 2^{1-n}T_n$ est un polynôme unitaire de degré n et à coefficients réels car T_n est de degré n à coefficients réels et $\text{CD}(T_n) = 2^{n-1}$. De plus :

$$\|V_n\|_\infty = 2^{1-n} \|T_n\|_\infty = 2^{1-n}.$$

12. (a) Les polynômes V_n et P étant tous deux de degré n , $\deg(V_n - P) \leq n$. De plus, puisqu'ils sont unitaires, les termes dominants se simplifient par différence. Ainsi, $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

- (b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculons

$$(V_n - P)(x_k) = 2^{1-n}T_n(x_k) - P(x_k) = 2^{1-n} \cos(k\pi) - P(x_k) = 2^{1-n}(-1)^k - P(x_k).$$

Or, $|P(x_k)| \leq \|P\|_\infty < 2^{1-n}$ par hypothèse. Deux cas se présentent alors :

- si k est pair, $(V_n - P)(x_k) = 2^{1-n} - P(x_k) > 0$ car $P(x_k) < 2^{1-n}$;
- si k est impair, $(V_n - P)(x_k) = -2^{1-n} - P(x_k) < 0$ car $-P(x_k) < 2^{1-n}$.

- (c) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Le polynôme $V_n - P$ change strictement de signe sur $[x_k, x_{k+1}]$. Comme la fonction polynomiale associée est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $V_n - P$ s'annule au moins une fois sur $]x_{k+1}, x_k[$. Ceci étant vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $V_n - P$ s'annule donc au moins en n réels distincts.

Le polynôme $V_n - P$ admet au moins n racines distinctes et est de degré inférieur à $n - 1$. Donc $V_n - P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $V_n = P$.

On aboutit à une contradiction puisque $\|P\|_\infty < 2^{1-n} = \|V_n\|_\infty$. Ainsi, pour tout polynôme à coefficients réels unitaire et de degré n , $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n} = \|V_n\|_\infty$.

Partie IV. Majoration de l'erreur

13. Prouvons l'existence d'un tel polynôme. Notons pour cela, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Rappelons que (L_1, \dots, L_n) est la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels deux à deux distincts a_1, \dots, a_n , et que ces polynômes vérifient, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \text{et} \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

Considérons le polynôme :

$$P = \sum_{i=1}^n f(a_i) L_i.$$

Ce polynôme est de degré au plus $n - 1$ en tant que combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et vérifie pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(a_j) = \sum_{i=1}^n f(a_i) \underbrace{L_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} = f(a_j) L_j(a_j) = f(a_j).$$

D'où l'existence d'un tel polynôme.

Pour montrer l'unicité, considérons P et Q des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(a_i) = f(a_i) = Q(a_i).$$

Le polynôme $R = P - Q$ est de degré au plus $n - 1$ et admet a_1, \dots, a_n pour racines distinctes. Donc $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P = Q$.

Ainsi, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

14. (a) Puisque t n'appartient pas à $\{a_1, \dots, a_n\}$, $S(t)$ est non nul. Par suite, on peut poser

$$\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{S(t)}, \text{ de sorte que } \varphi(t) = 0.$$

(b) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda \underbrace{S(a_i)}_{=0} = f(a_i) - f(a_i) = 0.$$

Comme φ s'annule également en t et que tous les réels a_1, \dots, a_n, t sont distincts, ceci nous donne $n + 1$ annulations de ϕ .

(c) Il s'agit d'appliquer le théorème de Rolle en cascade. Remarquons en préambule que φ est de classe \mathcal{C}^n sur $[-1, 1]$ en tant que combinaison linéaire de telles fonctions.

Montrons par récurrence sur $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ la propriété $\mathcal{P}(i)$: " φ s'annule (au moins) $n + 1 - i$ fois dans $[-1, 1]$ ".

I La propriété au rang $i = 0$ a été établie à la question précédente : $\varphi^{(0)} = \varphi$ s'annule $n + 1$ fois sur $[-1, 1]$.

H Soit $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Supposons que $\varphi^{(i)}$ s'annule $n + 1 - i$ fois sur $[-1, 1]$. Notons les $c_1 < \dots < c_{n+1-i}$.

Soit $j \in \llbracket 1, n - i \rrbracket$. La fonction $\varphi^{(i)}$ est continue sur $[c_j, c_{j+1}]$, dérivable sur $]c_j, c_{j+1}[$, et s'annule en c_j et c_{j+1} . Par le théorème de Rolle, il existe $d_j \in]c_j, c_{j+1}[$ tel que $\varphi^{(i+1)}(d_j) = 0$.

On a montré l'existence de $n - i$ points d'annulation pour $\varphi^{(i+1)}$. D'où la propriété au rang $i + 1$.

Par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(i)$ est vraie pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois dans $[-1, 1]$.

(d) Puisque P est de degré au plus $n - 1$, sa dérivée n -ème est nulle.

D'autre part, la fonction polynomiale S est de degré n et unitaire. Par conséquent, $S^{(n)}$ est constante, égale à $n!$.

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - \lambda S^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \lambda n!.$$

(e) Par la question 14.(c), il existe $a \in [-1, 1]$ tel que $\varphi^{(n)}(a) = 0$, soit avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$f^{(n)}(a) - \lambda n! = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Mais λ a été fixé de telle sorte que $\varphi(t) = 0$. Ainsi :

$$f(t) - P(t) = \lambda S(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t).$$

15. Soit $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Par la question précédente, il existe $a \in [-1, 1]$ tel que :

$$f(t) - P(t) = \lambda S(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t).$$

En prenant les valeurs absolues puis en majorant :

$$|f(t) - P(t)| \leq \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |S(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |S(t)|$$

où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$ (qui existe bien par continuité de $f^{(n)}$). Et cette inégalité est encore valable lorsque t est l'un des a_1, \dots, a_n puisqu'elle devient alors $0 \leq 0$.

16. La fonction S est polynomiale unitaire de degré n . D'après la question 12 :

$$\|S\|_\infty \geq 2^{1-n}$$

et cette borne est atteinte lorsque

$$S = 2^{1-n} T_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right),$$

c'est-à-dire lorsque $a_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{n} \right)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour ce choix de a_1, \dots, a_n , on obtient pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |S(t)| \leq \frac{M_n}{n!} 2^{1-n}.$$

Le réel $\frac{M_n}{n!} 2^{1-n}$ apparaît comme un majorant de $\{|f(t) - P(t)|, t \in [-1, 1]\}$. Par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux :

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{M_n}{n!} 2^{1-n}.$$