DS 6

Devoir surveillé du Samedi 4 Avril

La calculatrice est interdite. Durée : 3h30.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. (a) Donner un développement limité de $\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
   (b) Montrer qu'un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 est donné par :
   $$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$
   (c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore f le prolongement ainsi obtenu.
   (d) Donner l'équation de la tangente T_0 à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_0 au voisinage de 0.

Exercice 2

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction concave. On considère la fonction
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \end{array} \right. .$$
   (a) Prouver que pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \leq f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:
   $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$
2. (a) Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$,
   $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Exercice 3

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On note $\mathscr{N}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :
   $$\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Montrer que $\mathscr{N}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En déterminer une base et la dimension.

(b) Montrer que $\mathscr{N}$ est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{N}^2, \quad AB \in \mathscr{N}.$$

(c) Montrer que les matrices appartenant à $\mathscr{N}$ commutent deux à deux, c'est-à-dire que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{N}^2, \quad AB = BA.$$

(d) Montrer que le produit de trois matrices appartenant à $\mathscr{N}$ est toujours nul, c'est-à-dire que

$$\forall (A,B,C) \in \mathscr{N}^3, \quad ABC = 0.$$

2. On note $\mathscr{J}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathscr{J} = \{I + N \mid N \in \mathscr{N}\}$.
   (a) L'ensemble $\mathscr{J}$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
   (b) Montrer que $\mathscr{J}$ est stable pour le produit matriciel.
3. On considère l'application $E : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad E(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2.$$

   (a) Montrer que $E(\mathscr{N}) \subset \mathscr{J}$.
   (b) Montrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{N}, \quad E(A+B) = E(A) \times E(B).$$

   (c) En déduire que : $\forall A \in \mathscr{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(E(A))^n = E(nA)$.
   (d) En déduire également que, pour toute matrice $A \in \mathscr{N}$, $E(A)$ est inversible et que son inverse est $E(-A)$.
4. On considère l'application $L : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad L(A) = A - I - \frac{1}{2}(A-I)^2.$$

   (a) Montrer que $L(\mathscr{J}) \subset \mathscr{N}$.
   (b) Soit $N \in \mathscr{N}$. Calculer $(L \circ E)(N)$ et $(E \circ L)(I+N)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 (Approximation d'une fonction $\mathscr{C}^n$ sur un segment par des polynômes)

Les différentes parties de cet exercice sont dans une large mesure indépendantes.

Dans tout le problème, **on confond (identifie) un polynôme et sa fonction polynomiale associée sur** $[-1,1]$. Ceci sera justifié en préliminaire.

Le but de ce problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un segment par des polynômes coïncidant avec f en certains points.

Pour une fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, on notera $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[-1,1]} |f(t)|$ (dont l'existence est assurée par le préliminaire).

Partie I. Résultats préliminaires

1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. On suppose que $P(t) = Q(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$. Montrer que $P = Q$.

   Dans tout le problème on confondra donc polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$.
2. Si f est une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\max\limits_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

Partie II. Polynômes de Tchebychev

Pour tout entier naturel n, on définit sur $[-1,1]$ la fonction T_n par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

3. Calculer T_0 et T_1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

   On pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$.

5. Calculer T_2 et T_3.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de T_n.

9. (a) Justifier que :
$$\forall \theta \in [0,\pi], \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0,\pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
   (c) On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que T_n est scindé dans $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.
   (d) Donner la factorisation de T_n en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Partie III. Minoration de la norme infinie sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré n, $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n}$ et que cette inégalité est atteinte pour $P = 2^{1-n}T_n$ où T_n désigne le n-ème polynôme de Tchebychev.

10. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$.

11. Montrer que $V_n = 2^{1-n}T_n$ est un polynôme unitaire et de degré n et que $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$.

12. Dans cette question, on suppose qu'il existe un polynôme P unitaire et de degré n tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$, c'est-à-dire que pour tout $t \in [-1,1]$, $|P(t)| < 2^{1-n}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
   (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n-1$.
   (b) Donner le signe de $(V_n - P)(x_k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
   (c) En déduire que $V_n = P$. Conclure.

Partie IV. Majoration de l'erreur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on considère une fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[-1,1]$. On se donne $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $[-1,1]$ deux à deux distincts.

13. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad P(a_i) = f(a_i).$$

14. On note dans la suite $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$, et on considère $\varphi : x \in [-1,1] \mapsto f(x) - P(x) - \lambda S(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on **fixe** $t \in [-1,1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.
   (a) Montrer qu'il est possible de choisir λ tel que $\varphi(t) = 0$. On fixe ainsi λ dans la suite de cette question.
   (b) Montrer que φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1,1]$.
   (c) En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1,1]$.
   (d) Déterminer $\varphi^{(n)}$ en fonction de $f^{(n)}$, n et λ.
   (e) En déduire qu'il existe $a \in [-1,1]$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}S(t)$.

15. Déduire de la question précédente que pour tout $t \in [-1,1]$, $|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!}|S(t)|$, où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

16. Pour quel choix de $a_1, \dots, a_n$ la quantité $\|S\|_\infty$ est-elle minimale ? Montrer qu'alors :

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{M_n}{n!}2^{1-n}.$$
