Correction - DS 7

# Devoir surveillé du Samedi 27 Avril

## Exercice 1

### Partie I : Étude de la série harmonique.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or, pour tout $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2n-(n+1)+1) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.}$

(b) Par l'absurde, suppose que la série harmonique converge et notons $H \in \mathbb{R}$ sa somme. Alors $\lim_{n\to+\infty} H_n = H$ et $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} = H$. En passant à la limite dans l'inégalité démontrée précédemment, on obtient alors $0 = H - H \geq \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.

Donc $\boxed{\text{la série harmonique diverge.}}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant pour $t$ allant de $k$ à $k+1$ (bornes croissantes), on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

et donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

Soit un entier $n \geq 2$. On somme les inégalités précédentes pour $k$ allant de 1 à $n-1$ :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or :

- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{1} = H_n - 1.$
- Par la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n).$
- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n}.$

Finalement,
$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$$
et donc
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$
En divisant par $\ln(n) > 0$ (quitte à prendre $n \geq 3$),
$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$
Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et donc $\boxed{H_n \sim \ln(n).}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on obtient :
$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$
La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est convergente, et donc $\boxed{\text{la suite } (\gamma_n) \text{ converge vers un réel } \gamma.}$

(b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$, on a l'égalité $\gamma_n = \gamma + o(1)$ et donc :
$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

**Partie II : Étude d'une deuxième série.**

4. On remarque que
$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2}.$$
Or la série de $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme générale } a_n \text{ est convergente.}}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En décomposant les indices de sommation selon la parité :
$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}H_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}.$$
Finalement :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n.}$$

(b) Par décomposition en éléments simples de la fraction $a_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$a_k = -\frac{1}{k} + \frac{2}{2k-1}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = -H_n + 2\left(H_{2n} - \frac{1}{2}H_n\right) = 2(H_{2n} - H_n).$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} a_k = 2\left(H_{2n} - H_n\right).}$

(c) Comme $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, on obtient avec le résultat de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\left((\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1))\right) = 2\ln(2) + o(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\ln(2).$$

On retrouve donc que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et on a de plus que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2\ln(2).}$

---

## Exercice 2

1. On applique le théorème de la bijection :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est polynomiale, donc continue.
   - $f_n$ est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

     $$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$

     Donc $f_n$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

   D'après le théorème de la bijection, $f_n$ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in ]-\infty, 1]$, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution } u_n \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Donc $f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$. Comme $f_n$ est strictement décroissante, $0 < u_n < 1$ donc $\boxed{u_n \text{ appartient à l'intervalle } ]0, 1[.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n \in ]0, 1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :

   $$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

   Ainsi, $\boxed{f_{n+1}(u_n) \geq 0.}$
   Puisque $f_{n+1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que

   $$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

   on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$.
   Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

   (c) La suite $(u_n)$ est croissante et majorée (car $u_n \in ]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème des suites monotones, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers une limite finie } \ell.}$

   (d) Comme $0 < u_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite dans une inégalité, on obtient que $0 \leq \ell \leq 1$. Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit} \quad 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

   $(u_n)$ étant croissante et convergente vers $\ell$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

   $$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par passage à la limite, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\boxed{\ell = 1.}$

3. (a) Puisque $u_n \in ]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in ]0,1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :

$$\ln(v_n) = \ln(1-u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln(u_n) = n\ln(1 + (u_n - 1)).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, on a :

$$\ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$

D'où finalement $\boxed{\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n.}$

(b) On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.}$$

On a $-\ln(v_n) > 0$ et $nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\boxed{\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n).}$

(c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

Donc, on a $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.}$

4. La série $\sum v_n$ est à termes positifs d'après les questions précédentes. On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ ;

- $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 3$ ;
- la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$

De même, la série $\sum v_n^2$ est à termes positifs, et on a :

- $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{n^2}$ ;
- $\dfrac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque $\dfrac{\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \dfrac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} \to 0$ par croissances comparées ;
- la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\sum v_n^2 \text{ converge.}}$

---

## Exercice 3

1. (a) On a $\boxed{X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3).}$

   On en déduit que $(u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 3\mathrm{Id}_E) = u^2 - 5u + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Comme $u$ commute avec $u$ et les multiples de $\mathrm{Id}_E$,

   $$\boxed{(u - 3\mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E) = (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 3\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

   (b) - Soit $y \in \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (u - 3\mathrm{Id}_E)(x)$. Alors, avec la question précédente :

   $$(u - 2\mathrm{Id}_E)(y) = (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 3\mathrm{Id}_E)(x) = 0.$$

   Donc $y \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E).}$
   - Soit $y \in \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (u - 2\mathrm{Id}_E)(x)$. Alors, avec la question précédente :

   $$(u - 3\mathrm{Id}_E)(y) = (u - 3\mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)(x) = 0.$$

   Donc $y \in \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E).}$

   (c) On remarque que $\boxed{\mathrm{Id}_E = (u - 2\mathrm{Id}_E) - (u - 3\mathrm{Id}_E).}$
   Alors :
   - Pour tout $x \in E$,

   $$x = \mathrm{Id}_E(x) = \underbrace{(u - 2\mathrm{Id}_E)(x)}_{\in \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)} - \underbrace{(u - 3\mathrm{Id}_E)(x)}_{\in \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E)} = \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E).$$

   Donc $E \subset \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E)$.
   L'inclusion $\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E) \subset E$ est évidente car $\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
   Finalement, $\boxed{E = \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E).}$

- Soit $y \in \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E)$. Il existe $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que :

$$y = (u - 2\mathrm{Id}_E)(x_1) = (u - 3\mathrm{Id}_E)(x_2).$$

  Or :

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{Id}_E(y) = (u - 2\mathrm{Id}_E)(y) - (u - 3\mathrm{Id}_E)(y) \\ &= \underbrace{(u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 3\mathrm{Id}_E)(x_2)}_{=0} - \underbrace{(u - 3\mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)(x_1)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E) = \{0\}.}$

Finalement, $\boxed{E = \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E).}$

(d) - Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)$. Alors :

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = \underbrace{(u - 2\mathrm{Id}_E)(x)}_{=0} - \underbrace{(u - 3\mathrm{Id}_E)(x)}_{=0} = 0.$$

  Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E) = \{0\}.}$

- Avec le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E)) \end{aligned}$$

  D'après la question précédente, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E))$. Donc, en sommant les égalités précédente, on obtient :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)).}$$

Finalement, $\boxed{E = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E).}$

2. (a) Quitte à poser un système, on obtient $\boxed{2p + 3q = u.}$

(b) Comme $\mathrm{Id}_E$ et $u$ sont des endomorphismes de $E$, $p = 3\mathrm{Id}_E - u$ et $q = u - 2\mathrm{Id}_E$ sont aussi des endomorphismes de $E$. De plus,

$$p^2 = (3\mathrm{Id}_E - u) \circ (3\mathrm{Id}_E - u) = 9\mathrm{Id}_E - 6u + u^2 = \underbrace{(6\mathrm{Id}_E - 5u + u^2)}_{=0} + (3\mathrm{Id}_E - u) = p$$

$$q^2 = (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E) = 6\mathrm{Id}_E - 5u + u^2 = \underbrace{(6\mathrm{Id}_E - 5u + u^2)}_{=0} + (u - 2\mathrm{Id}_E) = q$$

Ainsi, $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.}}$

De plus,

$$\begin{aligned} p \circ q &= (3\mathrm{Id}_E - u) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E) = 6\mathrm{Id}_E - 5u + u^2 = 0, \\ q \circ p &= (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (3\mathrm{Id}_E - u) = 6\mathrm{Id}_E - 5u + u^2 = 0, \end{aligned}$$

donc $\boxed{p \text{ et } q \text{ commutent}}$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.

(c) Comme $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on peut démontrer par récurrence (laissée au lecteur) que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p^k = p$ et $q^k = q$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $p$ et $q$ commutent, on obtient alors avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
u^n &= (2p+3q)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (2p)^k \circ (3q)^{n-k} \\
&= 3^n q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n} 2^k 3^{n-k} p^k \circ q^{n-k} + 2^n p^n \\
&= 3^n q + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n} 2^k 3^{n-k} \underbrace{p \circ q}_{=0} + 2^n p \\
&= 3^n q + 2^n p.
\end{aligned}$$

On remarque que la formule obtenue est encore vraie si $n = 0$.
Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = 3^n q + 2^n p.}$

3. (a) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x_1,y_1) + (x_2,y_2)) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \\
&= (4(\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2), (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2)) \\
&= \lambda(4x_1 - 2y_1, x_1 + y_1) + (4x_2 - 2y_2, x_2 + y_2) \\
&= \lambda f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^2.}$

(b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^2(x,y) = f(f(x,y)) = (14x - 10y, 5x - y) = 5f(x,y) - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$

donc $\boxed{f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = 0_{\mathbb{R}^2}}$.

(c) On peut appliquer les résultats de la question 2. Posons $p = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f$ et $q = f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. On sait alors que $p$ et $q$ sont des projecteurs, que $p \circ q = q \circ p = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n = 3^n q + 2^n p$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p(x,y) = (-x + 2y, -x + 2y) \quad \text{et} \quad q(x,y) = (2x - 2y, x - y).$$

On obtient finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{f^n(x,y) = ((2 \times 3^n - 2^n)x + (-2 \times 3^n + 2 \times 2^n)y, (3^n - 2^n)x + (-3^n + 2 \times 2^n)y).}$$

4. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n, v_n) = (u_{n+1}, v_{n+1})$.
Par récurrence (laissée au lecteur), on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n, v_n) = f^n(u_0, v_0) = f^n(1, -1).$$

Avec la question précédente, on a finalement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} u_n &=& (2 \times 3^n - 2^n) - (-2 \times 3^n + 2 \times 2^n) = 4 \times 3^n - 3 \times 2^n \\ v_n &=& (3^n - 2^n) - (-3^n + 2 \times 2^n) = 2 \times 3^n - 3 \times 2^n \end{array}}$$

## Exercice 4 (Commutant d'une matrice, polynômes en une matrice)

**Partie 1 : questions préliminaires**

1. Montrons que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   - La matrice nulle $M = 0_n$ appartient bien à $\mathscr{C}(A)$ puisque $M \times A = 0_n = A \times M$.
   - Soient $M, N \in \mathscr{C}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + \mu N$ appartient à $\mathscr{C}(A)$ :

   $$\begin{aligned} A \times (\lambda M + \mu N) &= \lambda A \times M + \mu A \times N \\ &= \lambda M \times A + \mu N \times A \qquad \text{car } M, N \in \mathscr{C}(A) \\ &= (\lambda M + \mu N) \times A. \end{aligned}$$

   Ainsi $\lambda M + \mu N$ appartient bien à $\mathscr{C}(A)$.

   $\boxed{\mathscr{C}(A) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   - Pour $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, $P(A) = 0_n$, de sorte que la matrice nulle appartient bien à $\mathbb{R}[A]$.
   - Soient $M, N \in \mathbb{R}[A]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + \mu N$ appartient à $\mathbb{R}[A]$.
     Puisque $M, N \in \mathbb{R}[A]$, il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$. Dès lors :

   $$\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A) = R(A)$$

   où $R = \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi, $\lambda M + \mu N$ appartient bien à $\mathbb{R}[A]$.

   $\boxed{\mathbb{R}[A] \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

   Montrons à présent que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$. Soit pour cela $M \in \mathbb{R}[A]$. Par définition, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. Notons $P = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Alors :

   $$\begin{aligned} A \times M = A \times P(A) &= A \times \left(a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n\right) \\ &= a_k A^{k+1} + a_{k-1} A^k + \cdots + a_1 A^2 + a_0 A \\ &= \left(a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n\right) \times A \\ &= P(A) \times A = M \times A. \end{aligned}$$

   Ainsi $M \in \mathscr{C}(A)$, et $\boxed{\mathbb{R}[A] \text{ est inclus dans } \mathscr{C}(A)}$

3. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

   $$I_n \times M = M = M \times I_n.$$

   Ainsi $M$ appartient à $\mathscr{C}(I_n)$. D'où l'inclusion $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}(I_n)$ et donc l'égalité $\boxed{\mathscr{C}(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
   En particulier, $\boxed{\mathscr{C}(I_n) \text{ est de dimension } n^2.}$

   Soit $M \in \mathbb{R}[I_n]$. Par définition, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, qu'on écrit $P = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, tel que :

   $$M = P(I_n) = a_k I_n^k + a_{k-1} I_n^{k-1} + \cdots + a_1 I_n + a_0 I_n = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) I_n.$$

   On remarque que $M$ appartient à $\mathrm{Vect}(I_n)$. Ainsi $\mathbb{R}[I_n] \subset \mathrm{Vect}(I_n)$.

   Réciproquement, $I_n = P(I_n)$ pour $P = X$, et appartient donc à $\mathbb{R}[I_n]$. Puisque $\mathbb{R}[I_n]$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit l'inclusion $\mathrm{Vect}(I_n) \subset \mathbb{R}[I_n]$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[I_n] = \mathrm{Vect}(I_n)}$. Or $(I_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(I_n)$, et libre car constituée d'un vecteur non nul. C'est donc une base de cet espace. On en déduit que :

   $$\boxed{\dim(\mathbb{R}[I_n]) = \dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = 1.}$$

**Partie 2 : polynôme minimal d'une matrice**

4. (a) Calculons $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, puis :

$$(a+d)A - (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} - (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 = 0_2$, et $\boxed{P = X^2-(a+d)X+(ad-bc) \text{ est annulateur de } A.}$

(b) Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{I}}$ Puisque $A^0 = I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$, la propriété est vraie au rang $k = 0$.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^k$ appartient à $\mathrm{Vect}(I_2, A)$ : il existe $\alpha_k$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^k = \alpha_k A + \beta_k I_2.$$

En multipliant par $A$ (à gauche) :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \alpha_k A^2 + \beta_k A = \alpha_k \left((a+d)A - (ad-bc)I_2\right) + \beta_k A \\ &= \left(\alpha_k(a+d)+\beta_k\right) A - \alpha_k(ad-bc)I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A). \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, $A^k$ appartient à $\mathrm{Vect}(I_n, A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Montrons que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

- Pour $P = X$ et $Q = 1$, $A = P(A)$ et $I_2 = Q(A)$ appartiennent à $\mathbb{R}[A]$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc $\mathrm{Vect}(I_2, A)$ est inclus dans $\mathbb{R}[A]$.
- Réciproquement, pour tout $M \in \mathbb{R}[A]$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, qu'on note $P = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$, tel que :

$$M = P(A) = a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I_2.$$

Par la question précédente, tous les éléments de cette somme sont dans $\mathrm{Vect}(I_2, A)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $M$ appartient à $\mathrm{Vect}(I_2, A)$, et $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Ainsi, $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$ et $(I_2, A)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$.

On a alors deux cas :

- si la famille $(I_2, A)$ est liée, ce qui équivaut à l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$, alors :

$$\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A) = \mathrm{Vect}(I_2).$$

La famille $(I_2)$ est génératrice de $\mathbb{R}[A]$, et libre car constituée d'**un** vecteur non nul. C'est donc une base de $\mathbb{R}[A]$, et dans ce cas, $\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = 1.}$
- si $(I_2, A)$ est libre, puisqu'elle est aussi génératrice de $\mathbb{R}[A]$, c'est une base de $\mathbb{R}[A]$ et $\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = 2}$ dans ce cas.

5. (a) La famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ étant de cardinal $n^2+1$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension $n^2$, elle est liée : il existe $a_0, \ldots, a_{n^2}$ des réels non tous nuls tels que :

$$0_n = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = P(A)$$

en posant $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$. Ainsi $P$ appartient à $\mathscr{A}(A)$ et est non nul puisque les réels $a_0, \ldots, a_{n^2}$ sont non tous nuls : $\boxed{\mathscr{A}(A) \text{ n'est pas réduit au polynôme nul.}}$

(b) L'ensemble $\{\deg(P),\, P \in \mathscr{A}(A) \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide par la question précédente. $\boxed{\text{Il admet donc un plus petit élément } d \in \mathbb{N}.}$

(c) Soit $K \in \mathscr{A}(A)$ de degré $d$. Considérons $P$ un polynôme annulateur de $A$. Par théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes tel que :

$$P = KQ + R \ \text{ avec } \ \deg(R) < \deg(K) = d.$$

Mais :

$$0_n = P(A) = (K \times Q)(A) + R(A) = \underbrace{K(A)}_{=0_n} \times Q(A) + R(A) = R(A).$$

Ainsi, $R$ est annulateur de $A$, de degré $< d$. Par minimalité de $d$, $R$ est nécessairement le polynôme nul. D'où $P = KQ$ et $K$ divise $P$ : $\boxed{K \text{ divise tout polynôme de } \mathscr{A}(A).}$

(d) Justifions l'existence : par définition de $d$, il existe $K$ annulateur de $A$ de degré $d \geq 0$. Si on note $\alpha$ son coefficient dominant, nécessairement différent de 0 puisque $K$ est non nul, alors $\frac{1}{\alpha}K$ est unitaire, de degré $d$ et toujours annulateur de $A$. D'où l'existence d'un tel polynôme.

Soient à présent $K_1$ et $K_2$ deux polynômes unitaires de degré $d$ annulateurs de $A$. Par la question précédente, $K_1$ divise $K_2$ et $K_2$ divise $K_1$. Les polynômes $K_1$ et $K_2$ sont donc associés, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$K_1 = \lambda K_2.$$

Par identification des coefficients dominants dans cette égalité, il vient $1 = \lambda$, et donc $K_1 = K_2$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire de degré } d \text{ annulateur de } A.}$

6. (a) Montrons $\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ par double inclusion.

- Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$ et pour $P_k = X^k$, $A^k = P_k(A)$ appartient à $\mathbb{R}[A]$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \subset \mathbb{R}[A]$.
- Réciproquement, soit $M \in \mathbb{R}[A]$, et notons $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. Effectuons la division euclidienne de $P$ par $\pi_A$ : il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes tel que :

$$P = \pi_A \times Q + R \ \text{ avec } \ \deg(R) < d.$$

D'où :

$$M = P(A) = \underbrace{\pi_A(A)}_{=0_n} \times Q(A) + R(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$$

car $\deg(R) < d$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}).}$

(b) Soit $(a_0, \ldots, a_{d_1}) \in \mathbb{R}^d$ tel que :

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{d-1} A^{d-1} = 0_n.$$

Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1}$ est annulateur de $A$, de degré strictement plus petit que $d$. Par minimalité de $d$, $P$ est donc le polynôme nul, soit $a_0 = \cdots = a_{d-1} = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \text{ est libre.}}$

La famille $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}[A]$ par ce qu'on vient de faire. C'est donc une base de $\mathbb{R}[A]$, et $\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = d.}$

**Partie 3 : commutant d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts**

7. (a) Pour $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculons :

$$\boxed{M \times D = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_2 & \dots & m_{1,n}\lambda_n \\ m_{2,1}\lambda_1 & m_{2,2}\lambda_2 & \ddots & m_{2,n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_1 & m_{n,2}\lambda_2 & \dots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}, \quad D \times M = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_1 & \dots & m_{1,n}\lambda_1 \\ m_{2,1}\lambda_2 & m_{2,2}\lambda_2 & \ddots & m_{2,n}\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_n & m_{n,2}\lambda_n & \dots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}}.$$

(b) $M$ appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, $M \times D = D \times M$, ce qui équivaut à (avec le calcul effectué à la question précédente) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ i \neq j,\ m_{i,j}\lambda_j = m_{i,j}\lambda_i$$

Et comme les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont supposés deux à deux distincts, ceci est encore équivalent à :

$$m_{i,j} = 0 \ \text{ pour tout } \ i \neq j.$$

Ainsi, $\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{C}(D) \text{ si, et seulement si, } M \text{ est une matrice diagonale.}}$

(c) Par la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(D) &= \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix},\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{\mu_1 E_{1,1} + \mu_2 E_{2,2} + \mu_n E_{n,n},\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}\right), \end{aligned}$$

où les $E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires qui constituent la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ est donc génératrice de $\mathscr{C}(D)$, et libre en tant que sous-famille de la famille libre $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. C'est donc une base de $\mathscr{C}(D)$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\dim(\mathscr{C}(D)) = n.}$

8. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**

(a) Soit $P = a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculons :

$$\begin{aligned} P(D) &= a_k D^k + \dots + a_1 D + a_0 I_n \\ &= a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} + \dots + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + a_0 I_n \\ &= \begin{pmatrix} a_k\lambda_1^k + \dots + a_1\lambda_1 + a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_k\lambda_2^k + \dots + a_1\lambda_2 + a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_k\lambda_n^k + \dots + a_1\lambda_n + a_0 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

(b) Avec le calcul précédent :

$$P(D)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0_n$$
$$\Leftrightarrow P(\lambda_1)=\cdots=P(\lambda_n)=0.$$

En particulier, si $P$ est un polynôme annulateur non nul de $D$, il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$, non nul puisque $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, tel que :

$$P=(X-\lambda_1)\times\cdots\times(X-\lambda_n)\times Q(X).$$

En prenant le degré, on obtient :

$$\boxed{\deg(P)=n+\deg(Q)\geq n.}$$

(c) Par la question précédente, le polynôme unitaire $P=(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$ est annulateur de $D$ et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de $D$. Donc $\boxed{\pi_D=(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n).}$

On a montré que $\mathbb{R}[D]\subset\mathscr{C}(D)$ à la question 2, $\dim(\mathbb{R}[D])=n$ avec les questions 6 et 8.(c), et $\dim(\mathscr{C}(D))=n$ à la question 7.(c). Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[D]=\mathscr{C}(D).}$

(d) On a déjà montré $\mathbb{R}[D]\subset\mathscr{C}(D)$ à la question 2. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M\in\mathscr{C}(D)$ Par la question 7.(b), $M$ est une matrice diagonale :

$$M=\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

où $\mu_1,\dots,\mu_n\in\mathbb{R}$.

On a montré en cours (à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange) l'existence (et l'unicité) d'un polynôme $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(\lambda_i)=\mu_i$. Calculons alors :

$$P(D)=\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}=M.$$

Ainsi, $M$ appartient à $\mathscr{R}[D]$, et on retrouve bien $\boxed{\mathbb{R}[D]=\mathscr{C}(D).}$

9. **Étude de $\mathscr{R}=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mid M^2=D\}$.**

(a) Soit $M\in\mathscr{R}$. $M$ satisfait donc $M^2=D$. Calculons :

$$M\times D=M\times M^2=M^2\times M=D\times M.$$

Ainsi, $\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{C}(D).}$

Or, d'après la question 7.(b), le commutant de $D$ est formé des matrice diagonales. Par conséquent, il existe $\mu_1,\dots,\mu_n$ des réels tels que :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}}.$$

(b) Substituons dans l'équation $M^2 = D$ :

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Par identification, on obtient $\mu_1^2 = \lambda_1, \dots, \mu_n^2 = \lambda_n$, soit $\mu_1 = \pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \mu_n = \pm\sqrt{\lambda_n}$.
Ainsi, si $M$ appartient à $\mathscr{R}$, alors $M$ est l'une des $2^n$ matrices :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Réciproquement, toutes ces matrices sont clairement dans $\mathscr{R}$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \ \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \right\}}$$

et $\boxed{\mathscr{R} \text{ est bien de cardinal } 2^n.}$

**Partie 4 : commutant des matrices de taille** $2 \times 2$

10. Pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, donc $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 4$. Et on a vu à la question 3. que $\dim(\mathscr{C}(I_2)) = 4$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\max_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 4.}$$

11. Tout d'abord, pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on sait d'après la question 7.(c) que $\dim(\mathscr{C}(D)) = 2$. Il suit que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.

    Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$. Puisque $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$, $\dim(\mathbb{R}[A]) \leq 1$. Mais d'après la question 4.(c), $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$. La famille $(I_2, A)$ est donc liée, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$. Mais alors, $\mathscr{C}(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ puisque $\lambda I_2$ commute avec toutes les matrices, et donc $\dim(\mathscr{C}(A)) = 4 \not\leq 1$.

    Ainsi pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim(\mathscr{C}(A)) \geq 2$, d'où :

$$\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \geq 2.$$

    Finalement, on a montré $\boxed{\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 2.}$