DS 7

Devoir surveillé du Lundi 27 Avril

La calculatrice est interdite. Durée : 4h00.

Exercice 1

Partie I : Étude de la série harmonique.

Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la n-ième somme partielle de la série harmonique.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire que la série harmonique diverge.

2. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. Posons $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En étudiant la série $\sum_{n\geq 1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$, montrer la convergence de la suite (γ_n) vers un réel γ.
   (b) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Partie II : Étude d'une deuxième série.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\left(H_{2n} - H_n\right)$.
   (c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une seule solution, notée u_n.

2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Justifier que la suite (u_n) converge.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.
   (b) Établir que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 3 (Puissances d'un endomorphisme à l'aide de projecteurs)

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que :

$$u^2 - 5u + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1. (a) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^2 - 5X + 6$.
   Que peut-on en déduire pour l'égalité $u^2 - 5u + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$?
   (b) Montrer que : $\mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)$.
   (c) Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $u - 3\mathrm{Id}_E$ et de $u - 2\mathrm{Id}_E$.
   En déduire que : $E = \mathrm{Im}(u - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.
   (d) Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

2. On pose $p = 3\mathrm{Id}_E - u$ et $q = u - 2\mathrm{Id}_E$.
   (a) Vérifier que u est une combinaison linéaire de p et de q.
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs qui commutent entre eux.
   (c) En déduire une expression simple de u^n valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (4x - 2y, x + y) \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Que vaut $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$?
   (c) Déduire des questions précédentes une expression de $f^n(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (d) On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{array} \right.$$

   Déterminer une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 4 (Commutant d'une matrice, polynômes en une matrice)

Partie 1 : questions préliminaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

appelé *le commutant de la matrice* A.

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d.$$

On note alors $\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

2. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$.

3. Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$ et $\mathbb{R}[I_n]$. Quelle est la dimension de ces sous-espaces vectoriels ?

Partie 2 : polynôme minimal d'une matrice

Soient toujours $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est *annulateur de* A si $P(A) = 0_n$. On note $\mathscr{A}(A)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

4. On suppose **dans cette question seulement** que $n = 2$, et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est annulateur de A.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.
   (c) En déduire que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$, puis $\dim(\mathbb{R}[A])$.
5. On étudie à présent le cas général d'une matrice carrée A de taille $n \geq 1$.
   (a) En considérant la famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$, montrer que $\mathscr{A}(A)$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) En déduire que $\{\deg(P),\, P \in \mathscr{A}(A) \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}\}$ admet un plus petit élément $d \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit $K \in \mathscr{A}(A)$ de degré d. En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}(A)$.
   (d) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré d annulateur de A.

   On appelle ce polynôme le *polynôme minimal de* A et on le note π_A.
6. On souhaite montrer que $\dim(\mathbb{R}[A]) = d$.
   (a) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$.
   (b) Montrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est libre. Conclure.

Partie 3 : commutant d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts. Considérons :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

7. **Étude de $\mathscr{C}(D)$.**
   (a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $M \times D$ et $D \times M$.
   (b) En déduire que M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, M est une matrice diagonale.
   (c) Déterminer $\dim(\mathscr{C}(D))$.
8. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**
   (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

   $$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire que si P est un polynôme annulateur non nul de D, alors $\deg(P) \geq n$.
   (c) Déterminer le polynôme minimal π_D de D. En déduire que $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$.

(d) Retrouver l'égalité $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$ à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange.

9. **Étude de $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = D\}$.**

   (a) Soit $M \in \mathscr{R}$. Montrer que M appartient à $\mathscr{C}(D)$. En déduire qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

   (b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 2^n, et déterminer les 2^n matrices M vérifiant $M^2 = D$.

Partie 4 : commutant des matrices de taille 2×2

10. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

11. Déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
