

Devoir surveillé du Samedi 6 Juin

Exercice 1

1. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de l'évaluation,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a_0), (\lambda P + Q)(a_1), \dots, (\lambda P + Q)(a_n)) \\ &= (\lambda P(a_0) + Q(a_0), \lambda P(a_1) + Q(a_1), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) + (Q(a_0), Q(a_1), \dots, Q(a_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

- (b) Déterminons le noyau de φ .

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont } n \text{ racines distinctes de } P \\ &\Leftrightarrow P = 0 \quad (\text{car } P \in \mathbb{R}_n[X]) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

De plus, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1$, on en déduit que φ est bijective. Ainsi, φ est isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur \mathbb{R}^{n+1} .

2. (a) On a démontré que φ est un isomorphisme. Donc $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Autrement dit, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(a_i) = b_i$.
- (b) Rappelons que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le i -ème polynôme de Lagrange est défini par :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

- (c) Par construction, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et donc

$$\varphi(L_i) = (0, \dots, 0, \underset{(i+1)\text{ème position}}{1}, 0, \dots, 0) = e_i.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= (b_0, \dots, b_n) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i e_i \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \varphi(L_i) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=0}^n b_i L_i\right) \quad (\text{par linéarité de } \varphi) \end{aligned}$$

Comme φ est injective, on a finalement $Q = \sum_{i=0}^n b_i L_i$.

3. (a) Rappelons que les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} sont respectivement $\mathcal{B} = (X^i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{C} = (e_i)_{0 \leq i \leq n}$ et

$$\varphi(X^j) = (a_0^j, a_1^j, \dots, a_n^j) = \sum_{i=0}^n a_i^j e_i.$$

On obtient alors :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

- (b) Par double implication :

\Rightarrow Par contraposition, s'il existe $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $i \neq j$, tels que $a_i = a_j$, alors les lignes L_i et L_j de la matrice sont égales. La matrice de Vandermonde est donc non inversible.

\Leftarrow Supposons maintenant que les a_i sont deux à deux distincts. On a démontré à la question 1. que φ est isomorphisme. Donc la matrice de Vandermonde, qui est exactement la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} , est inversible.

4. (a) En développant par rapport à la dernière ligne,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix} &= (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_0^n \\ a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} 1 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} X \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^{2(n+1)} \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} X^n. \end{aligned}$$

Tous les déterminants qui apparaissent dans ce développement sont des réels indépendants de X . Donc $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et son coefficient dominant est

$$(-1)^{2(n+1)} \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

- (b) On remarque que a_0, a_1, \dots, a_{n-1} sont n racines de $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X)$. En effet, en évaluant en $X = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, on obtient le déterminant d'une matrice avec deux lignes identiques donc non inversible.

Comme $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a obtenu toutes les racines de ce polynôme et on obtient donc la factorisation suivante (sans oublier le coefficient dominant) :

$$V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X) = V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (X - a_i).$$

En évaluant en $X = a_n$, on a finalement la relation :

$$V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i).$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

I Comme

$$V(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0,$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Avec la question précédente, puis avec l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} V(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) &= V(a_0, a_1, \dots, a_n) \prod_{i=0}^n (a_{n+1} - a_i) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times \prod_{i=0}^n (a_{n+1} - a_i) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

On a ainsi les équivalences :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \text{ inversible} &\Leftrightarrow V(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{les } a_i \text{ sont deux à deux distincts.} \end{aligned}$$

5. (a) Avec la formule du binôme, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(X + k)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} X^i.$$

On en déduit la matrice demandée :

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{0} 2^n & \cdots & \binom{n}{0} n^n \\ 0 & \binom{n}{1} & \binom{n}{1} 2^{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-1} 2 & \cdots & \binom{n}{n-1} n \\ 1 & \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

(b) En utilisant les propriétés du déterminant,

$$\begin{aligned}
 \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \det(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{0}2^n & \cdots & \binom{n}{0}n^n \\ 0 & \binom{n}{1} & \binom{n}{1}2^{n-1} & \cdots & \binom{n}{1}n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-1}2 & \cdots & \binom{n}{n-1}n \\ 1 & \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \cdots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} \\
 &= \left(\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^n & \cdots & n^n \\ 0 & 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) \times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 0 & 1 & 2^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} \\
 &= \left(\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) \times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^n \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} \\
 &= \boxed{\left(\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) \times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times V(0, 1, \dots, n)}.
 \end{aligned}$$

(c) Avec les questions précédentes,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(\prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) \times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times V(0, 1, \dots, n) \neq 0.$$

Donc \mathcal{F} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

Partie 1 : Fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

1. (a) Le support de X étant $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^n P(X = k) = \boxed{1}.$$

(b) G_X étant une fonction polynômiale, elle est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$G'_X(t) = \sum_{k=1}^n kP(X = k)t^{k-1}.$$

En particulier,

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^n kP(X = k) = \boxed{E(X)}.$$

(c) De la même façon,

$$G_X''(t) = \sum_{k=2}^n k(k-1)P(X=k)t^{k-2},$$

et donc

$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \sum_{k=2}^n k(k-1)P(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^n k^2 P(X=k) - \sum_{k=2}^n k P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k) - \sum_{k=1}^n k P(X=k) \\ &= E(X^2) - E(X). \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \boxed{G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2}. \end{aligned}$$

2. (a) G_X étant indéfiniment dérivable, on a pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_X^{(j)}(t) &= \sum_{k=j}^n k(k-1)\dots(k-j+1)P(X=k)t^{k-j} \\ &= \boxed{\sum_{k=j}^n \frac{k!}{(k-j)!} P(X=k)t^{k-j}}. \end{aligned}$$

(b) Si X et Y suivent la même loi, elles ont la même fonction génératrice.

Supposons réciproquement que $G_X = G_Y$. Alors pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X^{(j)}(t) = G_Y^{(j)}(t).$$

Donc pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$G_X^{(j)}(0) = G_Y^{(j)}(0).$$

Avec le calcul de la question précédente, on obtient pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$j! \times P(X=j) = j! \times P(Y=j)$$

et donc

$$P(X=j) = P(Y=j).$$

Ainsi, X et Y suivent la même loi.

3. (a) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on a :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n P(X=k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \boxed{(1-p + pt)^n}. \end{aligned}$$

(b) On dérive deux fois la fonction génératrice de X :

$$G'_X(t) = np(1-p+pt)^{n-1} \text{ et } G''_X(t) = n(n-1)p^2(1-p+pt)^{n-2}.$$

Donc :

- $E(X) = G'_X(1) = \boxed{np}$,
- $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = \boxed{np(1-p)}$.

Partie 2 : Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

5. Première méthode.

Remarquons que $Z(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{k=0}^{2n} P(Z = k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^n P((X = i) \cap (Z = k)) \right) t^k \quad (\text{probas totales}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^n P((X = i) \cap (Y = k - i)) \right) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^n P(X = i)P(Y = k - i) \right) t^k \quad (\text{indépendance}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i) \right) t^k \quad (\text{car } Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} P(X = i)P(Y = j) \right) t^k \\ &= \left(\sum_{i=0}^n P(X = i)t^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^n P(Y = j)t^j \right) \\ &= \boxed{G_X(t)G_Y(t)}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a avec le théorème de transfert :

$$G_Z(t) = E(t^Z) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y).$$

Les variables X et Y sont indépendantes donc, grâce au lemme des coalitions, t^X et t^Y le sont aussi. Par propriété de l'espérance d'un produit de variables indépendantes, on en déduit :

$$G_Z(t) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = \boxed{G_X(t)G_Y(t)}.$$

6. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$, alors (avec la question précédente et la question 3.(a)) :

$$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = (1-p+pt)^n(1-p+pt)^m = \boxed{(1-p+pt)^{n+m}}.$$

La fonction génératrice de Z est celle d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m, p)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi (question 2.(b)), $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)}$. On a ainsi redémontré le résultat du cours sur la somme de binomiales indépendantes.

7. Le sens direct est vrai d'après la question précédente.

Pour la réciproque, on sait d'après la question 5. que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$,

$$G_X(t) = (1 - p + pt)^n \text{ et } G_Z(t) = (1 - p + pt)^{2n}.$$

Donc $G_Y(t) = (1 - p + pt)^n$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi (question 2.(b)), on a finalement $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$.

Exercice 3

1. (a) f étant \mathcal{C}^1 , f' est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc bornée. Donc il existe un réel M tel que, pour tout $x \in [0, 1]$: $|f'(x)| \leq M$. L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\boxed{\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|}.$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n} \in [0, 1]$. Donc, pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a t et $\frac{k}{n} \in [0, 1]$. Avec la question précédente, on obtient :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left(t - \frac{k}{n} \right).$$

On écrit $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ sous forme d'intégrale (intégrale d'une constante) :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \quad (\text{bornes croissantes}) \\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} M \left(t - \frac{k}{n} \right) dt \quad (\text{question précédente}) \\ &= \left[\frac{M}{2} \left(t - \frac{k}{n} \right)^2 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ &= \frac{M}{2n^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}}.$$

- (c) Avec la relation de Chasles,

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

(d) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{2n} = 0$, on a par encadrement ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

2. (a) On intègre par parties, avec $u'(x) = x^p$, $u(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$, $v(x) = (1-x)^q$ et $v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ avec u et v de classe \mathcal{C}^1 car $q-1 \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1} \frac{1}{p+1} x^{p+1} dx \\ &= 0 - 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p+1} dx \end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(q) : \text{''} I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) \text{.''}.$$

I Pour $\frac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0, 0) = I(p, 0)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(q)$ vraie.

Avec la question précédente et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) \\ &= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a donc démontré la propriété pour tout $q \in \mathbb{N}$, et ceci quelque soit $p \in \mathbb{N}$. Finalement

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

Comme

$$I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \left[\frac{1}{p+q+1} x^{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

on aboutit à

$$I(p, q) = \frac{1}{p+q+1} \frac{p!q!}{(p+q)!} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. (a) Quand $(U_n = k)$, la loi de X_n est $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$ donc $X_n(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$.
 Pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $(U_n = \frac{k}{n})_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est un système complet d'événement donc

$$P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_1 = k) P_{(U_1=k)}(X_n = i)$$

avec

- $P(U_1 = k) = \frac{1}{n}$ (loi uniforme sur n valeurs) ;
- $P_{(U_1=k)}(X_n = i) = \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$ (loi $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$).

Donc

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

- (b) Il est possible de calculer cette somme directement avec le binôme de Newton (après avoir arrangé le coefficient binomial).

Une deuxième méthode plus rapide est de considérer une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

Alors $E(Y) = \frac{mk}{n}$ et donc

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = \sum_{i=0}^m iP(Y = i) = E(Y) = \boxed{\frac{mk}{n}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{i=1}^m i \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad (\text{intersion des sommes}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m i \frac{1}{n} \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{m(n-1)n}{n^2 \cdot 2} \\ &= \boxed{\frac{m(n-1)}{2n}}. \end{aligned}$$

- (c) Il est possible de même de faire un calcul direct. Autrement, toujours avec $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$ et le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} &= \sum_{i=0}^m i(i-1) P(Y = i) \\ &= E(Y(Y-1)) \\ &= E(Y^2) - E(Y) \quad (\text{par linéarité de } E) \\ &= V(Y) + E(Y)^2 - E(Y) \quad (\text{avec K-H}) \\ &= \frac{mk(n-k)}{n^2} + \frac{m^2k^2}{n^2} - \frac{mk}{n} \\ &= \boxed{m(m-1) \left(\frac{k}{n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Toujours avec le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
 E(X_n(X_n - 1)) &= \sum_{i=0}^m i(i-1)P(X_n = i) \\
 &= \sum_{i=1}^m i(i-1) \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-i} + 0 \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-i} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m(m-1)}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
 &= \boxed{\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}}.
 \end{aligned}$$

(d) Par linéarité de l'espérance, $E(X_n(X_n - 1)) = E(X_n^2) - E(X_n)$ donc

$$\begin{aligned}
 E(X_n^2) &= E(X_n(X_n - 1)) + E(X_n) \\
 &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n}.
 \end{aligned}$$

Avec la formule de K.-H. :

$$\begin{aligned}
 V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 \\
 &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2 \\
 &= \frac{m(n-1)}{12n^2} (2(m-1)(2n-1) + 6n - 3m(n-1)) \\
 &= \frac{m(n-1)}{12n^2} (m + 2n + mn + 2) \\
 &= \frac{m(n-1)}{12n^2} (m+2)(n+1) \\
 &= \boxed{\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}}.
 \end{aligned}$$

4. (a) Pour $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on avait trouvé :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} &= \binom{m}{i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
 &= \binom{m}{i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)
 \end{aligned}$$

avec pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x^i (1-x)^{m-i}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ car $m-i \in \mathbb{N}$. Or, avec les questions 1. et 2. :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x^i (1-x)^{m-i} dx = I(i, m-i) = \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i) = \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} \binom{m}{i} = \boxed{\frac{1}{m+1}}.$$

(b) Comme $X(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$ et que pour tout $i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \frac{1}{m+1}$,

$$\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } \llbracket 0, m \rrbracket \text{ et } E(X) = \frac{m}{2} \text{ et } V(X) = \frac{m(m+2)}{12}.$$

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers variable aléatoire X de loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, m \rrbracket)$.

(c) On a :

$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n} = \frac{m(1-1/n)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{2}$$

et

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2} = \frac{m(m+2)(1-1/n^2)}{12} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{m(m+2)}{12}.$$

On a donc bien $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = V(X)}.$
