DS 8

Devoir surveillé du Samedi 6 Juin

La calculatrice est interdite. Durée : 3h.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme.
2. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   (a) Justifier qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $Q(a_i) = b_i$.
   (b) Rappeler la définition des polynômes de Lagrange associés aux réels $a_0, a_1, \dots, a_n$.
   (c) Expliciter le polynôme Q à l'aide de ces polynômes de Lagrange.
3. (a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (b) En déduire que la matrice suivante (appelée matrice de Vandermonde)
   $$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$
   est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.
4. Dans cette question, on cherche à retrouver le résultat précédent en calculant le déterminant de la matrice de Vandermonde. On pose :
   $$V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$
   (a) En développant par rapport à la dernière ligne, justifier que $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner son coefficient dominant.
   (b) Donner n racines de $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X)$ et mettre $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X)$ sous forme factorisée.
   En déduire une relation entre $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.
   (c) Obtenir finalement une expression de $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$ en fonction de $a_0, a_1, \dots, a_n$ puis conclure.
5. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{F}$ la famille de vecteurs $(X^n, (X+1)^n, \dots, (X+n)^n)$.
   (a) Déterminer $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
   (b) En déduire une relation entre $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et $V(0, 1, \dots, n)$.
   (c) Que peut-on en déduire sur la famille $\mathscr{F}$?

Exercice 2
Partie 1 : Fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G_X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. (a) Calculer $G_X(1)$.
   (b) Montrer que $G'_X(1) = E(X)$.
   (c) Exprimer $V(X)$ en fonction de $G''_X(1)$ et de $G'_X(1)$.
2. (a) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, calculer $G_X^{(j)}(t)$.
   (b) En déduire que deux variables aléatoires finies X et Y suivent la même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. (a) Déterminer explicitement en fonction de n, p et t la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
   (b) A l'aide de la question 1, retrouver les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Partie 2 : Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose dans cette partie que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On pose $Z = X + Y$.

5. Exprimer la fonction génératrice G_Z de Z à l'aide de G_X et de G_Y.
6. On suppose que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et que Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(m, p)$.
   Expliciter G_Z dans ce cas et en déduire la loi de Z.
7. On suppose ici uniquement que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
   Que pensez vous de l'équivalence : Y suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ si, et seulement si, Z suit la loi $\mathscr{B}(2n, p)$?

Exercice 3
Partie 1 : Préliminaires.

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que :
   $$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$
   (c) Établir que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

(d) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose :

$$I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad I(p,q)=\dfrac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$.

(b) En déduire que : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad I(p,q)=\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 2}$, toutes définies sur le même espace probabilisé (Ω,P), telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, U_n suit la loi uniforme sur

$$\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\right\}.$$

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 2}$ définies elles aussi sur (Ω,P), et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n=\dfrac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(m,\dfrac{k}{n}\right)$.

3. (a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_n=i)=\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(b) Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i},$$

et en déduire que l'espérance de X_n est égale à $\dfrac{m(n-1)}{2n}$.

(c) Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i},$$

et en déduire l'espérance de $X_n(X_n-1)$.

(d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\dfrac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2}$.

4. (a) En utilisant les résultats obtenus à la première partie, calculer, pour tout i de $X_n(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=i).$$

(b) On admet qu'il existe une variable aléatoire X telle que, pour tout i de $X_n(\Omega)$,

$$P(X=i)=\lim_{n\to+\infty}P(X_n=i).$$

Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(c) Vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=E(X)\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to+\infty}V(X_n)=V(X).$$