TD 1

Raisonner et rédiger

Quantificateurs et connecteurs logiques

Exercice 1.1 (★)

Énoncer pour chaque proposition $\mathscr{P}$ qui suit, la proposition (**non** $\mathscr{P}$).

(i) Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçons.

(ii) Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.

(iii) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.

(iv) S'il pleut, je prends mon parapluie.

(v) Il n'y a pas de fumée sans feu.

Exercice 1.2 (★)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication :

$$a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

Pour chacune d'entre elles, donner sa valeur de vérité.

Exercice 1.3 (★★ - ✍)

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ trois propositions logiques.

1. À l'aide d'une table de vérité, montrer que les assertions $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$ et $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \\ R \Leftrightarrow P \end{cases}$ sont équivalentes.

2. À l'aide des règles de calcul propositionnel vues en cours, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$; | (ii) $((P \vee Q) \Rightarrow R)$ et $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$.

1. On vérifie que les tables de vérités sont les mêmes.

   Pour $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$:

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

   Pour $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow P)$:

P	Q	R	$(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow P)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Ainsi, $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$ et $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \\ R \Leftrightarrow P \end{cases}$ sont bien équivalentes.

2. Avec les équivalences logiques données dans le cours :

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) &\equiv (P \Rightarrow ((\neg Q) \vee R)) \\ &\equiv ((\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R)) \\ &\equiv (((\neg P) \vee (\neg Q)) \vee R) \\ &\equiv ((\neg(P \wedge Q)) \vee R) \\ &\equiv ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} ((P \vee Q) \Rightarrow R) &\equiv ((\neg(P \vee Q)) \vee R) \\ &\equiv (((\neg P) \wedge (\neg Q)) \vee R) \\ &\equiv (((\neg P) \vee R) \wedge ((\neg Q) \vee R)) \\ &\equiv ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \end{aligned}$$

Exercice 1.4 (★★)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;

(iii) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;

(iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

Exercice 1.5 (★★)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire en français les énoncés mathématiques suivants puis écrire leur négation :

(i) $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq m$;

(ii) $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$;

(iii) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$;

(v) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

(vi) $\exists A \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) = C$.

Exercice 1.6 (★★)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire mathématiquement les énoncés suivants puis écrire leur négation :

(i) f est la fonction nulle ;

(ii) f change de signe ;

(iii) f ne prend pas deux fois la même valeur ;

(iv) f présente un minimum ;

(v) f n'est pas monotone ;

(vi) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Exercice 1.7 (★★ - Permutation de quantificateurs - ✍)
Soit $\mathscr{P}(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables x et y appartenant à des ensembles E et F. Montrer que $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \mathscr{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \mathscr{P}(x,y))$. Que dire de la réciproque ?

> Supposons que $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)$. Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F,\ P(x_0,y)$.
> Soit $y \in F$. Alors $P(x_0,y)$ est vraie. Et donc $\exists x \in E,\ P(x,y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$). Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$. Nous venons donc bien de prouver que
>
> $$(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)).$$
>
> En revanche, la réciproque est fausse, puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ est vraie (pour tout réel, il existe un réel plus grand), alors que $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq y$ est fausse (il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels).
>
> **Remarque.** Nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles $\forall$ et $\exists$. Nous venons donc de prouver que si $\exists\forall$ est vraie, alors $\forall\exists$ est vraie aussi, mais la réciproque est fausse! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles $\forall$ et $\exists$.

Modes de raisonnement

Exercice 1.8 (★ - ✍)
Soient x et y deux réels. Montrer que $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercice 1.9 (★)
Prouver l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbb{N}^*, nx \in \mathbb{Z})$.

> Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par disjonction de cas :
>
> - si $x \notin \mathbb{Q}$, alors l'assertion ($x \notin \mathbb{Q}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ nx \in \mathbb{Z}$) est évidemment vraie.
> - Si $x \in \mathbb{Q}$, notons alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Et donc $qx = p \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la proposition $\exists n \in \mathbb{N}^*, nx \in \mathbb{Z}$ est vraie.
>
> Donc la proposition $x \notin \mathbb{Q}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ nx \in \mathbb{Z}$ l'est aussi.

Exercice 1.10 (★★★)
Déterminer l'ensemble des réels x tels que le prédicat suivant soit vrai :

$$\forall t \in [0,1],\ (x \geq t) \Rightarrow (x \geq 2t).$$

Notons $\mathscr{P}(x)$ le prédicat de l'énonce : $\forall t \in [0,1],\ x \geq t \ \Rightarrow\ x \geq 2t$.
Nous allons distinguer quatre cas.

- Si $x \geq 2$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $x \geq t$ et $x \geq 2 \geq 2t$, si bien que $\mathscr{P}(x)$ est vrai.
- Si $x \in]0,2[$, alors $\frac{x}{2} \in]0,1[$. Soit alors $t \in \left]\frac{x}{2},1\right[$. Alors $x \geq t$ et $t > \frac{x}{2}$, donc $x < 2t$. Par conséquent, $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est fausse, et donc $\mathscr{P}(x)$ est fausse.
- Si $x = 0$, alors pour $t \in [0,1]$, deux cas de figure se présentent : soit $t = 0$, et alors $x \geq t$ et $x \geq 2t$ sont vraies, si bien que l'implication $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est vraie.

  Soit $t > 0$, et alors $x \geq t$ est fausse, donc l'implication $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est vraie. Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie.
- Enfin, si $x < 0$, alors pour tout $t \in [0,1], x \geq t$ est fausse, donc l'implication $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est vraie. Et par conséquent $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

En résumé, l'ensemble des réels x tels que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie est $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

Exercice 1.11 (★ - ✍)
Soit x un réel. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.12 (★★)

1. Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.
2. Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$.
3. Montrer que si α est irrationnel, alors l'écriture du réel $a + \alpha b$ avec $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ est unique.

Exercice 1.13 (★★)
Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \Rightarrow (x > 1 \text{ ou } y > 1)$.
Écrire également la négation de cette proposition, ainsi que la réciproque de l'implication qu'elle contient. Cette réciproque est-elle vraie ?

Soient x, y deux réels. Nous allons prouver la contraposée de l'implication annoncée, c'est à-dire que $(x \leq 1 \text{ et } y \leq 1) \Rightarrow x + y \leq 2$. Mais cette implication est évidente par somme d'inégalités. Et donc l'implication de départ est vraie.

La négation de cette proposition est :

$$\exists x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \text{ et } x \leq 1 \text{ et } y \leq 1.$$

Enfin, l'implication réciproque est $(x > 1$ **ou** $y > 1) \Rightarrow x + y > 2$. Elle n'est généralement pas vraie, comme le prouve le cas $x = 2$, $y = 0$.

Exercice 1.14 (★★)
Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $2x = \sqrt{x^2+1}$;

(ii) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$;

(iii) $\sqrt{x-1} \geq x-7$.

Exercice 1.15 (★★)
On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer par Analyse-Synthèse que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.

Exercice 1.16 (★★)
Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 1.17 (★★★)

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Exercice 1.18 (★★★★)
On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

1. **Analyse.** Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que $\delta(x)\delta(y) = xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la forme de f.
2. **Synthèse.** Conclure.

> 1. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculons :
>
> $$(\delta(x) - \delta(y))^2 = (f(x) - f(y))^2 = (x-y)^2.$$
>
> D'où en développant :
>
> $$\delta(x)^2 - 2\delta(x)\delta(y) + \delta(y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$
>
> Comme $\delta(x)^2 = (f(x) - f(0))^2 = (x-0)^2 = x^2$ et de même $\delta(y)^2 = y^2$, on déduit de cette dernière égalité que :
>
> $$\delta(x)\delta(y) = xy.$$
>
> (b) En prenant $x = y = 1$, on obtient $\delta(1)^2 = 1$, et donc $\delta(1) = \pm 1$.
> En prenant à présent $x \in \mathbb{R}$ et $y = 1$, on obtient :
>
> $$\delta(x)\delta(1) = x, \text{ et donc } \delta(x) = \pm x.$$

D'où :

$$f(x) = \pm x + f(0).$$

On a ainsi montré que si f est une isométrie de $\mathbb{R}$, alors f est nécessairement de l'une des formes suivantes :

$$f : x \mapsto x + a \quad \text{ou} \quad f : x \mapsto -x + a$$

où $a\,(= f(0))$ est un réel quelconque.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x + a$. Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| = |(x + a) - (y + a)| = |x - y|.$$

Donc f est bien une isométrie de $\mathbb{R}$ dans ce cas.

On vérifie de même que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto -x + a$ est également une isométrie de $\mathbb{R}$. Ce qui termine la synthèse.

Concluons : les isométries de $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto x + a$ ou $x \mapsto -x + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Raisonnement par récurrence

Exercice 1.19 (★★)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et déterminer une expression explicite de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 1.20 (★★ - Une suite récurrente d'ordre 2)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3, u_1 = 7$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

Montrons par récurrence double que pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ » est vraie.

I $2^{0+1} + 3^0 = 3 = u_0$ et $2^{1+1} + 3^1 = 7 = u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(2^{n+2} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^{n+1} + 3^n\right) \\ &= 2^{n+1}(5 \times 2 - 6) + 3^n(5 \times 3 - 6) \\ &= 2^{n+1} \times 4 + 3^n \times 9 = 2^{n+3} + 3^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+2)$ vraie.

. Par principe de récurrence, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.21 (★★★)
Au rugby, une équipe peut marquer 3 points (drop ou pénalité), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Déterminer l'ensemble des scores possibles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « n est un score possible au rugby », qui se récrit : « $\exists a, b, c \in \mathbb{N}$, $n = 3a + 5b + 7c$ ».

Constatons que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(3)$ sont vraies (prendre respectivement $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ et $(a, b, c) = (1, 0, 0)$.

Montrons que $\mathscr{P}(1)$ est fausse : supposons pour cela qu'il existe des entiers naturels a, b, c tels que $1 = 3a+5b+7c$. Si l'un de ces entiers est non nul, alors $3a+5b+7c > 1$. Donc $a = b = c = 0$, ce qui donne $1 = 0$, d'où une contradiction. Donc $\mathscr{P}(1)$ est fausse.

On montre de même que $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(4)$ sont fausses.

Montrons à présent par récurrence double que pour tout $n \geq 5$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

I $\mathscr{P}(5)$ est vraie (un essai non transformé) et $\mathscr{P}(6)$ est vraie (deux pénalités).

H Soit $n \geq 5$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies.

Par hypothèse de récurrence, il existe des entiers naturels a, b, c tels que $n = 3a + 5b + 7c$. Trois cas :

- Si $a \geq 1$, alors :
$$n + 2 = 3a + 5b + 7c + 2 = 3(a - 1) + 5(b + 1) + 7c$$
et $\mathscr{P}(n + 2)$ est vraie.
- Si $b \geq 1$, alors :
$$n + 2 = 3a + 5b + 7c + 2 = 3 + 5(b - 1) + 7(c + 1)$$
et $\mathscr{P}(n + 2)$ est vraie.
- Si $a = b = 0$, alors $c \geq 1$ (car $n \geq 5$) et :
$$n + 2 = 7c + 2 = 7(c - 1) + 9 = 3 \times 3 + 5 \times 0 + 7(c - 1)$$
et $\mathscr{P}(n + 2)$ est vraie.

Dans tous les cas, $\mathscr{P}(n + 2)$ vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $n \geq 5$, n est un score possible au rugby.

Remarque. D'autres rédactions étaient possibles, à l'aide d'une récurrence triple notamment.

Exercice 1.22 (★★)
Montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tels que $n = 2^p(2q + 1)$.

Exercice 1.23 (★)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Il s'agit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 = 1$ Procédons par récurrence forte sur n.

I On a évidemment $u_0 = 1$, donc la récurrence est initialisée.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k = 1$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(u_0^2 + \cdots + u_n^2\right) = \frac{1}{n+1}\left(1^2 + \cdots + 1^2\right) = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par le principe de récurrence (forte), pour tout $n \in \mathbf{N}, u_n = 1$. Ainsi, la suite (u_n) est constante égale à 1.

Exercice 1.24 (★★)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 1.25 (★★★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels (ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$) vérifiant les deux assertions suivantes :

- $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n = p$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n = n$ ». Prouvons par récurrence forte que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I Par le premier point, il existe un entier naturel p tel que $u_p = 0$. Or, par le deuxième point, $u_p \geq p$ donc $0 \geq p$. Puisque $p \leq 0$, on a donc $p = 0$ et donc $u_0 = 0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ en vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

Par le premier point, il existe un entier naturel p tel que $u_p = n+1$. Par ailleurs, par le deuxième point, $u_p \geq p$, donc $n+1 \geq p$. Ainsi, $p \in [\![0, n+1]\!]$.

Mais par hypothèse de récurrence, on a déjà $u_0 = 0 \neq n+1, u_1 = 1 \neq n+1, \dots, u_n = n \neq n+1$. Donc $p \geq n+1$.

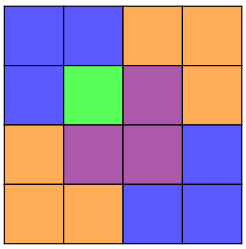
Finalement, $p = n+1$ et $u_{n+1} = n+1$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Par principe de récurrence, $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.26 (★★★★ - Un peu de Tétris)

On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ (où $n \geq 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 :) et de triominos coudés .

Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.



Nous allons raisonner par récurrence (simple) sur n, et plus précisément prouver la proposition $\mathscr{P}(n)$: « pour tout échiquier de taille $2^n \times 2^n$, quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos ».

I Pour $n = 2$, on procède de manière analogue à la figure de l'énoncé, quitte à faire une rotation du sous-échiquier de taille 2×2 contenant le monomino (selon la position de celui-ci).

H Soit $n \geq 2$. Supposons que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1}, sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes.

- **Étape 1 :** partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n.
- **Étape 2 :** Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- **Étape 3 :** positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- **Étape 4 :** les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos. Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut par principe de récurrence.