TD 10

Équations différentielles linéaires

Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 10.1 (★★)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués :

(E_1) : $y' - 2xy = xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$;

(E_2) : $y' - y\tan(x) = \cos^2(x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

(E_3) : $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$, $I = \mathbb{R}$;

(E_4) : $y' + y = xe^{x}\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$;

(E_5) : $y' + 2iy = e^{ix}$, $I = \mathbb{R}$;

(E_6) : $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = 1$, $I = \mathbb{R}$;

(E_7) : $\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$, $I =]0, +\infty[$;

(E_8) : $\begin{cases} (x+1)y' + (x^2+x+1)y = x \\ y(1) = e \end{cases}$, $I =]-1, +\infty[$.

Exercice 10.2 (★★★ - Raccordement de solutions)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

(E_1) : $xy' + y = \dfrac{2x}{x^2+1}$;

(E_2) : $xy' - 2y - x^4 = 0$;

(E_3) : $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$;

(E_4) : $(x^2 - x)y' + (2x-1)y = 1$.

Exercice 10.3 (★★★ - Oral Mines PSI)

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'\sin(x) + y\cos(x) = \sin(x)^2$?

> Commençons par mettre l'équation sous forme normalisée : $y' + y\frac{\cos x}{\sin x} = \sin x$, ce qui n'est valable que sur un intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$.
>
> Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-\ln|\sin x|} = \frac{\lambda}{\sin x}, \lambda \in \mathbb{R}$.
>
> Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, sous la forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\sin x}$.
> Alors $y'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{\sin x} - \lambda(x)\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.
> Et donc on a $y'(x) + \frac{\cos x}{\sin x}y(x) = \sin x \Leftrightarrow \lambda'(x) = \sin^2(x)$.
> Mais $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, et donc on peut prendre $\lambda(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x - \sin x\cos x}{2}$.
> Soit encore $y(x) = \frac{x}{2\sin x} - \frac{\cos x}{2}$.
> Et donc les solutions de l'équation sont les $x \mapsto \frac{x+2\lambda}{2\sin x} - \frac{\cos(2x)}{2}$.
> Une telle fonction ne peut admettre de limite finie en $k\pi$ que pour $2\lambda = k\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{k\pi}{2}$.
> Et de même, y ne peut avoir de limite en $(k+1)\pi$ que pour $\lambda = -\frac{(k+1)\pi}{2}$.
> Donc quel que soit λ, y n'a pas de limite en au moins l'une des bornes de $]k\pi, -(k+1)\pi[$.
> Or, une solution sur $\mathbb{R}$, si elle existait, devrait être solution sur$[k\pi, (k+1)\pi]$, et en particulier être continue en $k\pi$ et en $(k+1)\pi$. Nous venons de prouver que ceci n'est pas possible.

Exercice 10.4 (★★★ - Changement de fonction inconnue)
Résoudre l'équation différentielle (non linéaire du premier ordre) $y' = e^{x+y}$ en posant $z = e^{-y}$.

> On cherche donc les fonctions y dérivables sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $y'(x) = e^{x+y(x)}$.
> Pour y fonction dérivable sur I, posons, conformément à l'indication de l'énoncé, $z = e^{-y}$. Alors z est dérivable sur I, avec $z'(x) = -y'(x)e^{-y(x)}$.
> Et donc y est solution de $y' = e^{x+y}$ si, et seulement si :
>
> $$\forall x \in I, z'(x) = -e^{x+y(x)}e^{-y(x)} = -e^x.$$
>
> Soit si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) = -e^x + \lambda$.
> Mais alors, on ne peut avoir $e^{-y(x)} = -e^x + \lambda$ que pour $\lambda > 0$ et $\lambda > e^x \Leftrightarrow x < \ln(\lambda)$.
> Et donc les solutions de l'équation de départ sont les $x \mapsto -\ln(\lambda - e^x)$, définies sur $]-\infty, \ln(\lambda)[$, pour $\lambda > 0$.

Exercice 10.5 (★★★)

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1$.

   On pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)f(-x)$.

2. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + f(t) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

> 1. /
> 2. Supposons que f soit une solution. Alors $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est une constante, notons la A.
>
>   Donc f satisfait l'équation différentielle $y' + y = A$, dont les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} + A, \lambda \in \mathbf{R}$. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \lambda e^{-t} + A$.
>
>   D'autre part, on a alors
>
> $$A = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x + A.$$
>
>   Et donc nécessairement, $\lambda = 0$, de sorte que f est constante, égale à A.
>
>   Inversement, pour tout $A \in \mathbf{R}$, on a $\int_0^1 A\,\mathrm{d}x = A$, et donc la fonction constante égale à A est solution de (E).
>
>   Donc les solutions de (E) sont les fonctions constantes.

Exercice 10.6 (★★★★)
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. On étudie l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' + ay = \varphi(t).$$

1. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que y est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique.

> On pose $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f + f' = g$. On résout cette équation. L'équation homogène est $f' + f = 0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x}. On résout l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on trouve
> $$\lambda'(x)e^{-x} = g(x)$$
> et une solution particulière est donnée par
> $$f_0(x) = e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t.$$
> Finalement, toute fonction f vérifiant $f + f' = g$ s'écrit
> $$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t.$$
> Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$, et on va couper l'intégrale en 2. Voici l'idée. Soit $A > 0$ arbitraire pour le moment. Alors, pour $x \geq A$, on a
> $$\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t\right| \leq e^{-x}\int_0^A \left|g(t)e^t\right|\,\mathrm{d}t + e^{-x}\int_A^x |g(t)|e^t\,\mathrm{d}t$$
>
> - Si A est fixé, alors on peut rendre le premier terme petit en choisissant x suffisamment grand.
> - Sur $[A, x]$, on peut rendre $|g(t)|$ petit à condition d'avoir choisi A assez grand, ce qui nous permettra de rendre le deuxième terme petit.
>
> Reste à effectuer cette démarche dans le bon ordre. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour $t > A$, on a $|g(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M = \int_0^A \left|g(t)e^t\right|\,\mathrm{d}t$ et soit $B \geq A$ tel que, pour $x \geq B$, on a $e^{-x}M \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq B$, il vient
> $$\begin{aligned}\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t\right| &\leq e^{-x}\int_0^A \left|g(t)e^t\right|\,\mathrm{d}t + e^{-x}\int_A^x |g(t)|e^t\,\mathrm{d}t\\ &\leq e^{-x}M + e^{-x}\int_A^x \varepsilon e^t\,\mathrm{d}t\\ &\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$
> On a bien prouvé que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 10.7 (★★)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$;

(E_2) : $y'' - y' + (1+i)y = 0$;

(E_3) : $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

(E_4) : $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}(x)$;

(E_5) : $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$;

(E_6) : $y'' - y = e^x\cos(2x)$;

(E_7) : $y'' + 2y' = x^2 + xe^{-2x}$;

(E_8) : $y'' + y' + y = \cos^3(x)$;

(E_9) : $\begin{cases} y'' - y' - 2y = x^2 - x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 10.8 (★★)

Soit x et y des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Résoudre les système différentiels suivants :

$$(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_2) : \begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_3) : \begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2ty + t\sin(t) \end{cases}$$

On pourra poser $u = x + y$ et $v = x - y$ pour $(\mathscr{S}_1)$, trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par x pour $(\mathscr{S}_2)$, et poser $u = x + iy$ pour $(\mathscr{S}_3)$.

Exercice 10.9 (★★★ - Équation différentielle d'Euler)

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'*équation différentielle d'Euler* :

$$(E) : at^2y'' + bty' + cy = f(t)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ et f est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Posons $z(x) = y(e^x)$. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.

2. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' + ty' + y = \cos(2\ln(t))$ pour $t > 0$.

Exercice 10.10 (★★★)

Résoudre l'équation suivante sur $]-1, 1[$:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

On pourra poser $x = \sin(t)$.

> Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, il existe un unique $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \sin(t)$, et donc $y(x) = y(\sin(t))$. Posons $z : t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto y(\sin(t))$. Par composition, z est deux fois dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout t dans cet intervalle :
>
> $$z't) = \cos(t)y'(\sin(t)) \quad \text{et} \quad z''(t) = -\sin(t)y'(\sin(t)) + \cos(t)^2y''(\sin(t)).$$
>
> La fonction y est solution de l'équation différentielle sur $]-1, 1[$ si, et seulement si pour tout $x \in]-1, 1[$:
>
> $$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0,$$
>
> ce qui équivaut à pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
>
> $$(1 - \sin(t)^2)y''(\sin(t)) - \sin(t)y'(\sin(t)) + y(\sin(t)) = 0.$$
>
> Or cette dernière égalité se récrit :
>
> $$z''(t) + z(t) = 0.$$
>
> Ainsi, y est solution de l'équation différentielle de l'énoncé sur $]-1, 1[$ si, et seulement si, $z : t \mapsto y(\sin(t))$ est solution de l'équation différentielle $z'' + z = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) = \lambda\sqrt{1 - \sin(t)^2} + \mu\sin(t)$ (car $\cos(t) > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).
>
> Les solutions de l'équation différentielle de l'énoncé sont donc les fonctions de la forme :
>
> $$y : x \in]-1, 1[\mapsto \lambda\sqrt{1 - x^2} + \mu x$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.11 (★★)
On considère sur $I =]-1, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x.$$

1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x) = z(x)e^x$.

   Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle (E_1) que l'on résoudra.
3. Donner les solutions de (E).

Exercice 10.12 (★★★)

On considère une solution y de l'équation différentielle $ty'' - 2y' - ty = 0$ sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que y est indéfiniment dérivable pour tout $t > 0$.
2. En dérivant cette équation, montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants.
3. En raisonnant comme pour les équation du second ordre à coefficients constants, résoudre cette équation et en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 10.13 (★★★★ - Exemple d'un problème aux limites)

On considère une fonction indéfiniment dérivable $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ et l'équation $y'' + y = f(x)$. On cherche les solutions y sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$, et on pose à cet effet :

$$F(x) = -\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_{\pi/2}^x f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Préciser les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$.
2. On envisage ici les deux cas particulier $f : x \mapsto 1$ et $f : x \mapsto x$.
   Exprimer dans ces deux cas $F(x)$ sans symbole intégral, puis $F''(x) + F(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   En déduire dans ces deux cas les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$
3. On revient au cas général. Montrer que F est deux fois dérivable, expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$.
   En déduire les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

Exercice 10.14 (★★★★)

Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

> Soit f une fonction vérifiant la relation de l'énoncé. Commençons par noter que $\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$. Or, par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)$, dt sont de classe $\mathscr{C}^1$, et ont pour dérivées respectives f et $t \mapsto tf(t)$. Et donc la fonction $g : x \mapsto x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est donnée par :
>
> $$g'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
>
> Le théorème fondamental de l'analyse s'applique de nouveau, de sorte que g' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = f(x)$. Et donc $f = 1 - g$ est deux fois dérivable, et
>
> $$f''(x) = -g''(x) = -f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0.$$
>
> Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $f'' + f = 0$, de sorte qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$. Par ailleurs, $f(0) + \int_0^0 (0-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$, et $f'(0) = -g'(0) = -\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc nécessairement, $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.

Inversement, soit $f : x \mapsto \cos x$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)\cos(t)\,\mathrm{d}t &= [(x-t)\sin t]_0^x + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + [-\cos t]_0^x \\ &= 1-\cos(x) = 1-f(x)\end{aligned}$$

Et donc on a $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que f est solution au problème posé. Donc l'unique fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ est la fonction cos.

Alternative. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et notons F_1 l'unique primitive de f qui s'annule en 0 , donc $F_1 : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Et notons F_2 l'unique primitive de F_1 qui s'annule en 0 . Alors en procédant par intégration par parties, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t &= f(x) + [(x-t)F_1(t)]_0^x + \int_0^x F_1(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(x) - x\underbrace{F_1(0)}_{=0} + F_2(x) + \underbrace{F_2(0)}_{=0} \\ &= F_2''(x) + F_2(x).\end{aligned}$$

Donc f est solution du problème de départ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, F_2''(x) + F_2(x) = 1$. Les solutions de cette équation différentielle sont les $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + 1$, pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Comme on a de plus $F_2(0) = F_2'(0) = 0$, f est solution du problème posé si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_2(x) = 1-\cos(x)$.
Et donc si f est une solution du problème posé, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ (la dérivée seconde de $x \mapsto 1-\cos x$).
Et inversement, la même synthèse que précédemment prouve que $f = \cos$ est solution du problème posé.

Exercice 10.15 (★★★★)
Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire.
Montrer que pour chaque $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire solution de l'équation différentielle $y'' + ay = f(x)$ et vérifiant $y(0) = y_0$.

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$, et procédons par Analyse-Synthèse :

- **Analyse.** Soit g est une fonction paire solution de l'équation différentielle $y'' + ay = f(x)$ et vérifiant $y(0) = y_0$.

  Puisque g est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, sa dérivée g' est impaire sur $\mathbb{R}$, et satisfait donc $g'(0) = 0$. Ainsi, g est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay = f(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

- **Synthèse.** Soit g l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay = f(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Montrons que g est paire. Pour cela, considérons $h : x \in \mathbb{R} \mapsto g(-x)$. Alors $h(0) = g(0) = y_0$ et $h'(0) = -g'(0) = 0$. De plus, h est deux fois dérivable car g l'est, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = g''(-x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h''(x) + ah(x) = g''(-x) + ag(-x) = f(-x) = f(x)$$

car f est paire. Donc h est solution du même problème de Cauchy que g. Par unicité, $h = g$, et g est une fonction paire.