TD 11

Ensembles et relations binaires

Ensembles

Exercice 11.1 (★★)

Montrer les égalités d'ensembles suivantes :

(i) $]-1,1[=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$; (ii) $[-1,1]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 11.2 (★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E)\subset\mathscr{P}(F)$ si, et seulement si, $E\subset F$.

Exercice 11.3 (★★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Comparer les ensembles suivants :

(i) $\mathscr{P}(A\cap B)$ et $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$; | (ii) $\mathscr{P}(A\cup B)$ et $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$.

Exercice 11.4 (★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A\subset B$; | (ii) $A\cap B=A$; | (iii) $A\cup B=B$; | (iv) $A\cap\overline{B}=\emptyset$.

Exercice 11.5 (★★★)

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

(i) $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$;

(ii) $A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$;

(iii) $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Leftrightarrow B=C$;

(iv) $\overline{A}\setminus\overline{B}=B\setminus A$;

(v) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$;

(vi) $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C)=(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$.

Exercice 11.6 (★★★★)

Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E.

1. Montrer l'équivalence : $A\subset B\ \Leftrightarrow\ \forall X\in\mathscr{P}(E),\ A\cap X\subset B\cap X$.
2. Montrer l'équivalence : $A\cup B=E\ \Leftrightarrow\ \forall X\in\mathscr{P}(E),\ (X\cap A=\emptyset\Rightarrow X\subset B)$.

> 1. Supposons que $A\subset B$, et soit $X\in\mathscr{P}(E)$.
>
>   On souhaite alors prouver que $A\cap X\subset B\cap X$. Soit donc $x\in A\cap X$. Alors $x\in A$ et $x\in X$. Or $A\subset B$, donc $x\in B$, et donc $x\in B\cap X$.
>
>   Ainsi, on a prouvé que $\forall x\in A\cap X,\ x\in B\cap X$, si bien que $A\cap X\subset B\cap X$. Et ceci est vrai pour toute partie X de E.
>
>   Nous avons donc prouvé l'implication $A\subset B\Rightarrow\forall X\in\mathscr{P}(E), A\cap X\subset B\cap X$.
>
>   Inversement, supposons que $\forall X\in\mathscr{P}(E)$, $A\cap X\subset B\cap X$. Alors en particulier pour $X=E$,

on a $A \cap E \subset B \cap E \Leftrightarrow A \subset B$. Et donc $\forall X \in \mathscr{P}(E), A \cap X \subset B \cap X \Rightarrow A \subset B$.

2. Supposons que $A \cup B = E$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$ vérifiant $X \cap A = \emptyset$. Alors :

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = \underbrace{(X \cap A)}_{=\emptyset} \cup (X \cap B) = X \cap B \subset B.$$

Et donc on a bien prouvé que $\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B$.

Inversement, supposons que $\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B$. Prenons alors en particulier, $X = \bar{A}$. On a alors $A \cap \bar{A} = \emptyset$, et donc $\bar{A} \subset B$. Et alors $E = A \cup \bar{A} \subset A \cup B$.

Puisque A et B sont deux parties de E, on a évidemment $A \cup B \subset E$, et donc par double inclusion, $E = A \cup B$.

Nous avons donc prouvé que $(\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B) \Rightarrow A \cup B = E$. Donc par double implication,

$$A \cup B = E \quad \Leftrightarrow \quad (\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B).$$

Exercice 11.7 (★★★ - Différence symétrique)

Soit E un ensemble. On définit la *différence symétrique* de deux parties A, B de E par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.
3. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = B \Delta A$ et $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$.
5. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.
6. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre l'équation $X \Delta A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 11.8 (★★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:

(i) $X \cup A = B$; (ii) $X \cap A = B$; (iii) $X \setminus A = B$.

(i) Raisonnons par Analyse - Synthèse.

- **Analyse.** Supposons que X est solution de l'équation $X \cup A = B$. On a nécessairement A inclus dans B et X inclus dans B. Cependant, ceci ne suffit pas, il faut aussi que les éléments de B qui ne sont pas dans A se retrouvent dans X et donc que $B \setminus A \subset X$. Résumons, si l'équation $X \cup A = B$ admet une solution X, nécessairement

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \setminus A \subset X \subset B.$$

- **Synthèse.** Distinguons deux cas :
  - Cas où $A \not\subset B$: Il n'y a pas de solution à l'équation $X \cup A = B$.
  - Cas où $A \subset B$: Pour toute partie X vérifiant $B \setminus A \subset X \subset B$, on vérifie par double inclusion que $X \cup A = B$ et donc que X est solution.

$\boxed{\subset}$ $A \subset B$ et $X \subset B$ donc $X \cup A \subset B$.
$\boxed{\supset}$ Soit $x \in B$.
Si $x \in X$, $x \in X \cup A$ et c'est terminé.
Si $x \notin X$, alors $x \notin B \setminus A$ car $B \setminus A \subset X$. Donc $x \in A \cap B = A$ car $A \subset B$ et donc $x \in X \cup A$.
Dans tous les cas, $x \in X \cup A$ et donc $B \subset X \cup A$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid B \setminus A \subset X \subset B\}$.

(ii) Pour que l'équation $X \cap A = B$ admette une solution X, il faut que $B \subset X \cap A \subset A$. Ainsi, si $B \not\subset A$, cette équation n'admet pas de solution

Supposons dans la suite que $B \subset A$, et raisonnons par Analyse - Synthèse.

- **Analyse.** Soit $X \subset E$ tel que $X \cap A = B$. Alors :

$$B = X \cap A \subset X.$$

D'autre part, on remarquera avec un diagramme de Venn que si $X \cap A = B$, alors $X \setminus B \subset \overline{A}$. Montrons le par le calcul :

$$X \cap \overline{B} = X \cap \overline{(X \cap A)} = X \cap (\overline{X} \cup \overline{A}) = (X \cap \overline{X}) \cup (X \cap \overline{A}) = \emptyset \cup (X \cap \overline{A}) = X \cap \overline{A} \subset \overline{A}.$$

- **Synthèse.** Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $B \subset X$ et $X \setminus B \subset \overline{A}$. Montrons que $X \cap A = B$.
  - Puisque $B \subset A$, il suit que $B \subset X \cap A$.
  - D'autre part, soit $x \in X \cap A$. Si $x \notin B$, alors $x \in X \setminus B \subset \overline{A}$, et donc $x \in \overline{A} \cap A = \emptyset$, d'où une contradiction. Donc x appartient à B.

  Ainsi, $X \cap A = B$.

(iii) Cette équation se récrit :

$$X \cap \overline{A} = B.$$

On est donc ramené à la question précédente avec $\overline{A}$ en lieu et place de A. Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\{X \in \mathscr{P}(E) \mid B \subset X \text{ et } (X \setminus B) \subset A\}.$$

Exercice 11.9 (★★★)

Montrer que $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$.

Procédons par l'absurde en supposant que $\mathscr{D} = A \times B$ où A et B sont des parties de $\mathbb{R}$. Puisque $(1, 0) \in \mathscr{D}$, $(1, 0) \in A \times B$ et donc $1 \in A$. De même $(0, 1) \in \mathscr{D}$, et donc $1 \in B$. Par conséquent, on aurait $(1, 1) \in A \times B = \mathscr{D}$, ce qui est faux.

Exercice 11.10 (★★)

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
2. Montrer que $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
3. Que dire des ensembles $(A \times C) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$?

Exercice 11.11 (★★★)

Soient E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_0, A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E.$$

On pose pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ est une partition de E.

Exercice 11.12 (★★★★)

Soit E un ensemble et soient $E_1, \dots, E_n$ $(n \geq 2)$ des parties deux à deux distinctes de E. Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre.

> Juste pour le plaisir, et bien que ceci ne nous soit pas vraiment utile dans la suite, reformulons l'énoncé : il s'agit de prouver que
>
> $$\exists i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!]\backslash\{i\},\ E_j \not\subset E_i.$$
>
> Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n, le nombre d'ensembles. Autrement dit, nous prouvons la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante : « quelles que soient $E_1, \dots, E_n$ des parties deux à deux distinctes de E, il en existe une qui ne contienne aucune des autres. » Notons que là encore, il peut être instructif d'essayer d'écrire $\mathscr{P}(n)$ à l'aide de quantificateurs :
>
> $$\forall (E_1, \dots E_n) \in \mathscr{P}(E)^n, \left(\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j\right) \Rightarrow (\exists i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!]\backslash\{i\}, E_j \not\subset E_i).$$
>
> - **Initialisation.** Pour $n = 2$, donnons nous deux parties E_1, E_2 de E distinctes. Alors on ne peut avoir à la fois $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, car alors on aurait $E_1 = E_2$, contredisant le fait que $E_1 \neq E_2$.
>
>   Donc on a toujours soit E_1 qui ne contient pas E_2, soit E_2 qui ne contient pas E_1.
>
> - **Hérédité.** Soit $n \geq 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et considérons $E_1, \dots, E_{n+1}$ des parties distinctes de E.
>
>   Par hypothèse de récurrence, l'un des $E_1, \dots, E_n$, appelons-le E_i, ne contient aucun des autres. Il y a alors deux cas possibles :
>
>   – Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, alors aucun des $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_{n+1}$ n'est contenu dans E_i.
>
>   – Si $E_{n+1} \subset E_i$, alors E_{n+1} ne contient aucun des $E_k, k \in [\![1, n]\!]$. En effet, pour $k \neq i$, si on avait $E_k \subset E_{n+1}$, comme $E_{n+1} \subset E_i$, on aurait également $E_k \subset E_i$, ce qui contredit la définition de i. Et pour $k = i$, on ne peut avoir $E_i \subset E_{n+1}$ car on a déjà $E_{n+1} \subset E_i$, et par hypothèse $E_i \neq E_{n+1}$ car $E_1, \dots, E_{n+1}$ sont deux à deux distincts.. Et donc E_{n+1} ne contient aucun des ensembles $E_1, \dots, E_n$.
>
>   Ainsi, dans tous les cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
>
> Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$. Et donc, pour toute famille finie de parties deux à deux distinctes de E, l'une [4] de ces parties (au moins) n'en contient aucune autre.

Relations binaires

Exercice 11.13 (★)

Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence. Décrire géométriquement ses classes d'équivalence.

Exercice 11.14 (★★)
Sur $\mathbb{Z}$, on définit une relation binaire $\mathscr{R}$ par : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11.15 (★★)
Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il existe sur E une relation $\mathscr{R}$ qui soit à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Que dire des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

Si on suppose de plus que la relation d'ordre $\mathscr{R}$ est totale, que dire de E ?

Exercice 11.16 (★★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la relation de congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathbb{R}$, et donner un système de représentants des classes d'équivalences.

Exercice 11.17 (★★★★)
Soit E un ensemble non vide et soit $A \subset \mathscr{P}(E)$ une partition de E.

Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que A soit l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

> Définissons une relation $\sim$ sur E en posant :
>
> $$\forall (x,y) \in E^2, x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in A, \{x,y\} \subset X.$$
>
> Prouvons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, et que l'ensemble de ses classes d'équivalence est A.
>
> Soit $x \in E$. Puisque A est une partition de $E, \bigcup_{X\in A} X = E$, et donc en particulier, $x \in \bigcup_{X \in A} X$. Donc il existe $X \in A$ tel que $x \in X$. Et donc $\{x,x\} = \{x\} \subset X$, si bien que $x \sim x$. Donc $\sim$ est réflexive.
>
> Il est évident que $\sim$ est symétrique puisque $\{x,y\} = \{y,x\}$.
>
> Soient $x,y,z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors il existe $X_1, X_2 \in A$ tels que $\{x,y\} \subset X_1$ et $\{y,z\} \subset X_2$. Mais alors $\{y\} \subset X_1 \cap X_2$, si bien que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Et donc par définition d'une partition, $X_1 = X_2$. Et donc $\{x,z\} \subset \{x,y\} \cup \{y,z\} \subset X_1$. Donc $x \sim z$, si bien que $\sim$ est transitive.
>
> Et donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur E.
>
> Reste à prouver que $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} = A$.
>
> Soit $X \in A$. Alors puisque [15] $X \neq \emptyset$, et donc il existe $x \in E$ tel que $x \in X$. Mais alors pour tout $y \in E, x \sim y \Leftrightarrow \exists Y \in A, \{x,y\} \subset Y$. Mais un tel Y contient x, et donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et donc $X = Y$. Et par conséquent, $y \in \mathrm{cl}(x) \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow y \in X$.
>
> Autrement dit, nous venons de prouver que $X = \mathrm{cl}(x)$. Donc déjà, tous les éléments de A sont des classes d'équivalence de $\sim$, si bien que $A \subset \{\mathrm{cl}(x), x \in E\}$.
>
> Inversement, soit $x \in E$, prouvons que $\mathrm{cl}(x) \in A$. Mais comme précédemment, il existe $X \in A$ tel que $x \in X$, et alors $\mathrm{cl}(x) = X$.
> Donc toute classe d'équivalence de $\sim$ est un élément de A, et donc $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} \subset A$.
>
> Par double inclusion, on a donc $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} = A$.

Exercice 11.18 (★)
Sur $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, on définit une relation $\preceq$ par :

$$\forall (z, z') \in E^2, \quad z \preceq z' \Leftrightarrow (|z| < |z'|) \textbf{ ou } (|z| = |z'| \textbf{ et } \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z')).$$

Montrer que $(E, \preceq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exercice 11.19 (★★)
On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ en posant $p \preceq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\, q = p^n$. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 11.20 (★★)
Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $F = \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs réelles. On définit une relation binaire $\leq$ sur F de la manière suivante :

$$\forall (f, g) \in F^2, \quad f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) \leq g(x).$$

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur F. À quelle condition est-ce un ordre total ?

Exercice 11.21 (★★)
On considère $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $|$. L'ensemble $\{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

Exercice 11.22 (★★★)
Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. On considère l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ muni de la relation d'ordre $\subset$.

1. Montrer que $\mathscr{P}(E) \backslash \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément.
2. Montrer que l'ensemble des singletons de E ne possède pas de plus grand élément. Est-il majoré ou minoré ? Admet-il une borne supérieure ou une borne inférieure ?

Exercice 11.23 (★★★★)
Soit E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est fini.

> Raisonnons par l'absurde, et supposons que E soit infini. On définit alors une suite par :
>
> $$x_0 = \min E, x_1 = \min E \backslash \{x_0\}, x_2 = \min E \backslash \{x_0, x_1\}$$
>
> et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \min E \backslash \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
> Notons que cette suite est bien définie, puisqu'à chaque étape, E étant infini, on a bien $E \backslash \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ qui est non vide, et donc admet un plus petit élément.
> Soit alors $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors A ne peut pas admettre de plus grand élément.
> En effet, la suite (x_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = \min E \backslash \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ et $x_{n+1} \in E \backslash \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E \backslash \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, donc $x_n \leq x_{n+1}$.
> Mieux, elle est strictement croissante, au sens où $x_n \leq x_{n+1}$, mais $x_{n+1} \neq x_n$ (puisque $x_{n+1} \in E \backslash \{x_0, \dots, x_n\}$).
> Supposons alors que A possède un plus grand élément a. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = a$.

Et alors, $a < x_{n_0+1}$ (par stricte croissance de la suite), mais $x_{n_0+1} \leq a$ (par définition d'un plus grand élément).

Ceci n'est pas possible. On en déduit donc que E est infini.
