TD 14

Suites numériques

Définition de la convergence

Exercice 14.1 (★)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, et on suppose $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Exercice 14.2 (★★)

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire. Que dire alors de la limite de (u_n) ?

Exercice 14.3 (★★★ - Moyennes de Césaro - ✍)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que si (u_n) est monotone, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et de même monotonie que (u_n).
2. (a) Montrer que si (u_n) converge vers 0, (v_n) aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

   (b) Montrer que si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, (v_n) aussi (*Théorème de Césaro*).
3. **Application.** Soit (w_n) une suite réelle. Montrer que si $\lim(w_{n+1} - w_n) = 0$, alors $\lim \dfrac{w_n}{n} = 0$.

Limites de suites

Exercice 14.4 (★★)

Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné par :

(i) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(ii) $\dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$

(iii) $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

(iv) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

(vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

(vii) $\sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

(viii) $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$

(ix) $(\ln(n))^{1/n}$

(x) $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/\ln(n)}$

Exercice 14.5 (★★)

Soit (u_n) une suite bornée.

1. Montrer que l'on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup(\{u_k,\ k \geq n\})$ et $w_n = \inf(\{u_k,\ k \geq n\})$.
2. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente si, et seulement si, $\lim v_n = \lim w_n$.

Exercice 14.6 (★★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\alpha)$ et $v_n = \sin(n\alpha)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n. Même question pour v_{n+1}.
2. En déduire que si l'une des deux suites (u_n) et (v_n) converge, alors l'autre aussi.
3. Prouver alors que (u_n) et (v_n) divergent.

Exercice 14.7 (★★★ - Règle de D'Alembert - ✍)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\ell > 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq \dfrac{1+\ell}{2} u_n$.

   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose $\ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Donner des exemples de suites (u_n) pour lesquelles $\ell = 1$, qui tendent vers 0, qui tendent vers un réel non nul, ou encore qui tendent vers $+\infty$.

Suites adjacentes

Exercice 14.8 (★★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et en déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 14.9 (★★ - Théorème des segments emboîtés)

Soit $([a_n, b_n])_n$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de $\mathbb{R}$ et dont les longueurs tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Exercice 14.10 (★★★ - Moyenne arithmético-géométrique)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a \leq b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, puis qu'elles convergent vers la même limite. *Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.*

Suites implicites et suites récurrentes

Exercice 14.11 (★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle notée u_n.
2. Montrer que (u_n) est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice 14.12 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note x_n cette solution.

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone, puis convergente, et calculer sa limite.

Exercice 14.13 (★)

Donner le terme général des suites définies par :

(i) $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$;

(ii) $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \lambda v_n + 3$, où λ est une constante réelle.

Exercice 14.14 (★)

Expliciter puis étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(i) $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$;

(ii) $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$;

(iii) $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

Exercice 14.15 (★★)

Étudier les suites définies par :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$ et $u_0 = 1/2$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et $u_0 = 1$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.16 (★★ - Méthode de Héron pour le calcul approché de $\sqrt{2}$)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{|u_n - \sqrt{2}|^2}{2}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$. Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?

4. Combien de termes faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice 14.17 (★★★)

Soit (z_n) définie par $z_0 = re^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.
On désigne par r_n le module de z_n et par θ_n l'argument de z_n tel que $-\pi \leq \theta_n \leq \pi$.

1. Effectuer la construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.

2. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et de θ_n, et en déduire $\lim \theta_n$.

3. Étudier la suite $u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, et en déduire r_n et $\lim r_n$, puis $\lim z_n$.

Suites extraites

Exercice 14.18 (★)

Montrer que la suite de terme général u_n n'a pas de limite dans les deux cas suivants :

(i) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (★) u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 14.19 (★★)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.
Montrer que toute suite réelle périodique et convergente est constante.

Exercice 14.20 (★★)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans les deux cas suivants :
(i) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent ; (ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 14.21 (★★★ - ✍)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non bornée. Montrer qu'elle admet une sous-suite qui tend vers l'infini.

Exercice 14.22 (★★★)

Soit (u_n) telle que $u_0 \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n - (-1)^n}$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 14.23 (★★★★)

Soit (z_n) une suite complexe. On suppose que : $\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p \neq q \;\Rightarrow\; |z_p - z_q| \geq 1$.
Prouver que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Caractérisations séquentielles

Exercice 14.24 (★★)

Déterminer les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, des ensembles de réels suivants :

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1},\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2},\, (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}},\, (m,n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Exercice 14.25 (★★★)

Dans cet exercice, on note $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m},\, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
2. Soit $r \in \mathbb{Q}$, et soient $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $r = \frac{p}{q}$.
   (a) Justifier que pour n suffisamment grand, le réel $u_n = \sqrt{q^2n^2 + 2np} - \sqrt{q^2n^2}$ est bien défini.
   (b) Prouver que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$.
3. En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}$.
