TD 16

Limites et continuité

Limites de fonctions

Exercice 16.1 (★★)

Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$;

(iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2)$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$;

(vi) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x^2)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$;

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$;

(viii) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

(ix) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$;

(x) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$;

(xi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\sqrt{x+1})-\sin(\sqrt{x})$.

Exercice 16.2 (★★)

Déterminer les limites suivantes, si elles existent (et montrer qu'elles n'existent pas le cas échéant) :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\lfloor x\rfloor$; (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$.

Exercice 16.3 (★★)

Étudier la limite (éventuellement les limites à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :

(a) $\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ en a ; (b) $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}$ en 1 ; (c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.

Continuité

Exercice 16.4 (★★)

Les fonctions suivantes sont-elles continues ou prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $g(x)=x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$; $h(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$; $i(x)=\sin(1+x)\ln(|1+x|)$.

Exercice 16.5 (★★)

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

$f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; $g(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$: $h(x)=e^{-1/x}$; $i(x)=(1+x)^{1/x}$

Exercice 16.6 (★★★)

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 16.7 (★★★)

1. Montrer que si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que : $f \leq g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 16.8 (★)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I vérifiant : $\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)|$ et $f(x) \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Que dire si les fonctions ne sont pas continues ?

Exercice 16.9 (★)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 16.10 (★★)

1. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout y strictement compris entre ℓ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b]$ tel que $f(c) = y$.
2. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$. Montrer que pour tout $y \leq f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = y$.

Exercice 16.11 (★★)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 16.12 (★★★)

Un randonneur parcourt 20km en 5h.

1. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a fait exactement 4km.
2. Il prétend que, sur n'importe quel intervalle de deux heures, il a parcouru 10km. Est-ce possible ?

Exercice 16.13 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet une unique point fixe. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose f croissante ?

Exercice 16.14 (★★)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

2. Même question lorsqu'on suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.

Exercice 16.15 (★★★)

Soit $k \geq 0$. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. On suppose que $k = 1$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $k \in [0, 1[$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 16.16 (★★★)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. On se propose de montrer que f est strictement monotone.

1. **Première méthode :** On considère $a, b, x, y \in I$ avec $a < b$ et $x < y$. On pose pour $t \in [0, 1]$, $u(t) = tx + (1 - t)a$ et $v(t) = ty + (1 - t)b$. On pose $G(t) = f(u(t)) - f(v(t))$.

   (a) Calculer $u(0), u(1), v(0), v(1)$. Tracer u et v.
   (b) Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $u(t) < v(t)$.
   (c) En déduire que G ne s'annule pas sur $[0, 1]$ puis que $G(0)$ et $G(1)$ ont le même signe.
   (d) En déduire que f est monotone sur I.

2. **Deuxième méthode :** On suppose que f n'est pas monotone.

   (a) Expliquer pourquoi on peut supposer qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$. Faire un dessin.
   (b) Conclure.

Exercice 16.17 (★★★)

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et : $\forall x \in [0, 1]$, $f \circ f(x) = x$.

1. Montrer que f est injective. En déduire qu'elle est strictement croissante.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) = x$.

   On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $f(x) < x$ ou $f(x) > x$.

Exercice 16.18 (★★)

Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ quand $x \to +\infty$.

2. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors f est constante.

3. On suppose f continue. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.

Exercice 16.19 (★★)
On considère, pour une application $f : I \to \mathbb{R}$, les deux assertions :

$$A : \text{« } \forall x \in I,\ f(x) > 0 \text{ »} \quad \text{et} \quad B : \text{« } \exists \alpha > 0, \forall x \in I, f(x) \geq \alpha \text{ »}.$$

Étudier si $A \Rightarrow B$ dans chacun des cas suivants :

1. $I = [0,1]$ et f continue sur I ;
2. $I = \mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$;
3. $I =]0,1[$ et f continue sur I ;
4. $I = [0,1]$.

Exercice 16.20 (★★)
Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) + m \leq g(x)$.

Exercice 16.21 (★★)
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16.22 (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. Supposons que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et soient finies.

   Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction f atteint-elle ses bornes ?
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$, montrer que f admet un minimum absolu.

Équations fonctionnelles

Exercice 16.23 (★★)
On cherche à déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x)$.
2. En déduire que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)$.
3. Conclure en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16.24 (★★★)
Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$;

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$;

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$.

(iv) (★) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$.
