TD 17

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 17.1 (★)

Montrer que si A, B sont deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A+B$ et AB sont encore nilpotentes. Est-ce encore vrai si on ne suppose plus que A et B commutent ?

Exercice 17.2 (★★ - Matrices stochastiques)

Une matrice $A=(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1-\lambda)\cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\quad A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \forall i,j,\ a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.

   (b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.

Exercice 17.3 (★★★ - Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ - ✍)

On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$\mathscr{Z}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{Z}_2$?
3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice $M \in \mathscr{Z}_n$.

   (a) Pour tout $1 \leq i,j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

   (b) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

   (c) Conclure.

> 1. On peut proposer 0_n ou I_n. Plus globalement, toute matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n pour $\lambda \in \mathbb{K}$, est dans $\mathscr{Z}_n$. Le but de la suite de l'exercice est de montrer qu'il n'y en a pas d'autres.
> 2. On a :
> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times E_{1,2} = E_{1,2} \neq E_{1,2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_{1,2}.$$
> Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans le centre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

3. (a) Rappelons que :
$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Pour tous $1 \leq i, j \leq n$:
$$E_{i,j} \times M = E_{i,j} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell} E_{i,j} \times E_{k,\ell}}_{=0 \text{ si } k \neq j}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell} E_{i,\ell}$$
D'autre part :
$$M \times E_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) \times E_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j}}_{=0 \text{ si } \ell \neq i}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} E_{k,j}$$
(b) Puisque $M \in \mathscr{Z}_n$, on a $M \times E_{i,j} = E_{i,j} \times M$, d'où :
$$\sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell} E_{i,\ell} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} E_{k,j}.$$
Par unicité de l'écriture comme somme de matrices élémentaires (on utilise ici ce qu'on appelle la liberté de la famille $(E_{i,j})$) :
$$\begin{cases} m_{j,\ell} = 0 & \text{pour tout } \ell \neq j, \\ m_{k,i} = 0 & \text{pour tout } k \neq i, \\ m_{j,j} = m_{i,i} & (\text{cas } \ell = j \text{ et } k = i). \end{cases}$$
Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on en déduit que :
$$\begin{cases} m_{i,j} = 0 & \text{pour tout } i \neq j \\ m_{i,i} = m_{j,j} & \text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!] \end{cases}.$$
La matrice M est donc égale à $M = m_{1,1} I_n$. C'est donc bien une matrice scalaire.

(c) Réciproquement, les matrices scalaires appartiennent bien à $\mathscr{Z}_n$. Ainsi (par double inclusion) :
$$\mathscr{Z}_n = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 17.4 (★★★ - Nilpotence des matrices triangulaires strictes - ✍)
Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur à n.

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
(a) Identifier $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$

(b) Soient $k, \ell \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{T}_\ell^+(\mathbb{K})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}_{k+\ell}^+(\mathbb{K})$.

2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur à n.

1. (a) Par définition, $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j$$

ce qui correspond aux matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

De même, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j-1$$

ce qui correspond aux matrices triangulaires supérieures strictes :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j-n.$$

Puisque $i > j-n$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, une telle matrice est nulle. Donc $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble réduit à la matrice nulle. On notera plus généralement que $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K}) = \{0_n\}$ pour tout $k \geq n$.

(b) Soient $k, \ell \geq 1$ et $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{T}_\ell^+(\mathbb{K})$. Alors :

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i+k > j \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j-\ell.$$

On souhaite montrer que $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$[A \times B]_{i,j} = 0 \quad \text{si } i+k > j-\ell.$$

Or pour un tel couple (i,j) :

$$[A \times B]_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} b_{r,j} = \sum_{r=1}^{i+k-\ell} \underbrace{a_{i,r}}_{=0} b_{r,j} + \sum_{r=i+k}^{n} a_{i,r} \underbrace{b_{r,j}}_{=0 \text{ car } r \geq i+k > j-\ell} = 0$$

D'où le résultat.

2. Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte, de sorte que $A \in \mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient par une récurrence immédiate que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K}).$$

En particulier, $A^n \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) = \{0_n\}$, et A est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur à n.

Trace, transposée

Exercice 17.5 (★)

Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est symétrique si, et seulement si, $AB = BA$.

Exercice 17.6 (★★)

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 17.7 (★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}\left(A^\top A\right) = 0$ si, et seulement si, $A = 0_n$.

On a :

$$Tr(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} [A^\top A]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A^\top]_{i,j}[A]_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{j,i}[A]_{j,i}.$$

Ainsi $Tr(A^\top A) = 0$ équivaut à $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{j,i}^2 = 0$. Comme c'est une somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [A]_{j,i} = 0,$$

soit encore $A = 0$. D'où le résultat.

À retenir pour plus tard.
Ce calcul réapparaitra un peu plus tard lorsqu'on définira sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$.

Exercice 17.8 (★★★)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 17.9 (★★★★ - Oral Mines 2023)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0_n$. Montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$\operatorname{tr}((A + B)^k) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k).$$

Notons $\mathscr{P}(k)$ la propriété : "$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} B^i A^{k-i}$" et montrons cette propriété par récurrence.

$\boxed{\mathbf{I}}$ $\mathscr{P}(0)$ est vraie car :

$$\sum_{i=0}^{0} B^i A^{0-i} = B^0 A^0 = I_n = (A+B)^0.$$

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} &= (A+B) \times (A+B)^k \underset{\text{HR}}{=} (A+B) \sum_{i=0}^{k} B^i A^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} AB^i A^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} B^{i+1} A^{k-i} \\
&= A^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{AB}_{=0} B^{i-1} A^{k-i} + \sum_{i=1}^{k+1} B^i A^{k+1-i} \\
&= A + \sum_{i=1}^{k+1} B^i A^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} B^i A^{k+1-i}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} B^i A^{k-i}$.

Par linéarité de la trace, on a donc

$$\operatorname{tr}((A+B)^k) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(B^i A^{k-i}).$$

Mais pour $i \in [\![1, k-1]\!]$,

$$\operatorname{tr}(B^i A^{k-i}) = \operatorname{tr}(BB^{i-1} A^{k-i-1} A) = \operatorname{tr}(\underbrace{AB}_{=0} B^{i-1} A^{k-i-1}) = 0$$

Finalement,

$$\operatorname{tr}((A+B)^k) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(B^i A^{k-i}) = \operatorname{tr}(A^k) + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{tr}(B^i A^{k-i})}_{=0} + \operatorname{tr}(B^k) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k).$$

Matrices inversibles, algorithme du pivot de Gauss

Exercice 17.10 (★★)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice R échelonnée par lignes et une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que $EA = R$.

Exercice 17.11 (★★)

Calculer l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ E = (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}.$$

Exercice 17.12 (★★★)

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles en discutant suivant la valeur du paramètre réel α, calculer leur inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) & \mathrm{sh}(\alpha) \\ \mathrm{sh}(\alpha) & \mathrm{ch}(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.13 (★★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante - ✍)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

Soit $X = (x_i) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

> Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.
>
> Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$.
>
> En considérant la i_0-ème ligne du système $AX = 0$, on obtient :
>
> $$a_{i_0,1}x_1 + \cdots + a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \cdots + a_{i_0,n}x_n = 0$$
>
> qui se récrit :
>
> $$a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{i\neq i_0} a_{i_0,i}x_i.$$
>
> Prenons la valeur absolue de cette expression, et majorons par l'inégalité triangulaire :
>
> $$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left|-\sum_{i\neq i_0} a_{i_0,i}x_i\right| \leq \sum_{i\neq i_0} |a_{i_0,i}||x_i| \leq \sum_{i\neq i_0} |a_{i_0,i}||x_{i_0}|$$
>
> Par l'absurde, supposons $X \neq 0_{n,1}$. Alors $x_{i_0} \neq 0$, et en divisant par $|x_{i_0}| > 0$ l'expression précédente :
>
> $$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{i\neq i_0} |a_{i_0,i}|.$$
>
> Ceci contredit l'hypothèse A à diagonale strictement dominante.
>
> Ainsi, le système linéaire $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0$. Or c'est l'une des caractérisations de A inversible. Ainsi une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
>
> **Exemple.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est à stricte dominance diagonale. Elle est donc inversible.

Exercice 17.14 (★★★★)

Déterminer l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (dont la définition a été donnée à l'Exercice 17.2), inversibles et dont l'inverse est également stochastique.

Soit $A = (a_{i,j})$ une telle matrice, et $B = A^{-1} = (b_{i,j})$ sa matrice inverse, supposée stochastique aussi. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. En identifiant le coefficient en position (i, j) dans l'égalité $B \times A = I_n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = [B \times A]_{i,j} = [I_n]_{i,j} = 0.$$

Or par hypothèse, les coefficients des matrices A et B sont tous positifs. L'égalité précédente implique donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad b_{i,k} a_{k,j} = 0. \tag{$*$}$$

Fixons alors $k \in [\![1, n]\!]$. Comme la matrice B est inversible, la k-ème colonne de B n'est pas nulle : il existe un indice de ligne qu'on notera $i_k \in [\![1, n]\!]$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$. Mais alors en reprenant $(*)$, on obtient que pour tout $j \neq i_k$:

$$b_{i_k,k} a_{k,j} = 0, \quad \text{ et donc } \quad a_{k,j} = 0.$$

Ainsi, la k-ème ligne de A ne contient que des 0, sauf éventuellement le coefficient a_{k,i_k}. Et comme la matrice A est stochastique par lignes, ce coefficient a_{k,i_k} est nécessairement égal à 1.

Résumons : on vient de montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la k-ème ligne de A ne contient que des coefficients nuls sauf celui en position (k, i_k) qui lui vaut 1.

Reste alors une dernière remarque à faire : prenons $1 \leq k < \ell \leq n$ et comparons les lignes k et ℓ de A. Elles ont un seul coefficient non nul (qui vaut 1) respectivement en position (k, i_k) et (ℓ, i_ℓ). Si $i_k = i_\ell$, alors les lignes k et ℓ de A seraient égales, ce qui est impossible puisque A est inversible (par opération élémentaire, A serait équivalente par lignes à une matrice ayant une ligne nulle).

Ainsi, l'application $\sigma : k \in [\![1, n]\!] \mapsto i_k \in [\![1, n]\!]$ est injective, et donc bijective puisque les ensembles de départ et d'arrivée de même cardinaux. Et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{\sigma(i),j}.$$

Pour aller plus loin.

Une telle matrice est appelée *matrice de permutation associée à σ*. Plus précisément, à toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, on associe une matrice P_σ définie par :

$$P_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j}.$$

Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de permutation associée à la permutation σ de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$. Inversement, si τ est la permutation de $[\![1,3]\!]$ définie par $\tau(1) = 3$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 2$, alors on a $P_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut montré (laissé en exercice, on le fera dans un prochain chapitre) que pour σ et τ des permutations :

$$P_\sigma \times P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}.$$

En particulier, on montre à partir de cette égalité que P_σ est inversible, d'inverse $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$. L'inverse d'une matrice de permutation est donc aussi une matrice de permutation.

Réciproquement, si A est une matrice de permutation, elle est clairement stochastique. Et par échanges de lignes, A est équivalente par lignes à la matrice I_n. Elle est donc inversible, d'inverse une matrice de permutation qui est également stochastique.

Puissances et polynômes d'une matrice

Exercice 17.15 (★)

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On remarque que $A^2 = 2I_2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^{2n} = (A^2)^n = (2I_2)^n = 2^n I_2 \quad \text{et} \quad A^{2n+1} = A^{2n} \times A = 2^n I_2 \times A = 2^n I_2.$$

2. Le calcul des premières puissances de A prouve que

$$B^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}.$$

Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$ et pour tout $k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0 \times N^{k-3} = 0$.

   Comme $3I_3$ et N commutent, on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} C^n = (3I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} 3^n N^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} N^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} N^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k}_{=0} \\ &= 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & n3^n + 2n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Supposons que D est de taille n. Alors :

$$D^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

   puis

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & \dots & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (n-1)D.$$

   On a ensuite :

$$D^4 = (n-1)A^2, \quad D^5 = (n-1)D^3 = (n-1)^2 D...$$

   Une récurrence prouve alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^{2k} = (n-1)^{k-1} A^2 \quad \text{et} \quad A^{2k+1} = (n-1)^k A.$$

Exercice 17.16 (★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A.

2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.

Exercice 17.17 (★★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**

(a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.
(c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_n et β_n. En déduire α_n et β_n en fonction de n.
(d) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**
(a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.18 (★★)
Soient (x_n), (y_n), (z_n) trois suites réelles définies par $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{array} \right. .$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 17.19 (★★)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17.20 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale)
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ $(r \leqslant n)$ des scalaires distincts deux à deux et $(m_1, \ldots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$m_1 + \cdots + m_r = n$$

On pose $D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour toute fonction polynomiale P :

$$P(D) = \mathrm{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \ldots, \underbrace{P(\lambda_r), \ldots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $Q^{-1}AQ = D$. Déterminer un polynôme annulateur de A.

4. À l'aide de l'Exercice 17.19, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 17.21 (★★★★)

Soient $n \geq 2$ et N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que N est nilpotente.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice matrice qui commute avec N. Montrer que M est inversible si, et seulement si, $M + N$ est inversible.

Dans tout l'exercice, on notera p l'indice de nilpotence de la matrice N.

1. Puisque $N^p = 0_n$:
$$I_n = I_n^p - N^p = (I_n - N)\left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k I_n^{p-1-k}\right) = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}).$$
   Ainsi $A = I_n - N$ est bien inversible, d'inverse $A^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$.
2. Si $p = 1$, alors $N = 0$ et $I_n - A^{-1} = 0_n$ est bien nilpotente. Si $p \geq 2$:
$$I_n - A^{-1} = -N - N^2 - \cdots - N^{p-1} = N(-I_n - N - \cdots - N^{p-2}).$$
   Posons $M = -I_n - N - \cdots - N^{p-2}$. M est un polynôme en N, donc commute avec N, de sorte que :
$$(I_n - A^{-1})^p = (N \times M)^p = \underbrace{(N \times M) \times \cdots \times (N \times M)}_{p\text{fois}} \underset{M \text{ et } N \text{ commutent}}{=} N^p M^p = 0_n.$$
   Ainsi $I_n - A^{-1}$ est bien nilpotente.
3. Supposons que M est inversible. Montrons que $M + N$ est également inversible. Pour cela, écrivons :
$$M + N = M \times (I_n + M^{-1}N).$$
   Partant de l'égalité $MN = NM$, et en multipliant à gauche et à droite par M^{-1}, on obtient $NM^{-1} = M^{-1}N$, et puisque M^{-1} et N commutent :
$$(M^{-1}N)^p = (M^{-1})^p N^p = (M^{-1})^p \times 0_n = 0_n.$$
   Par la question 1. appliquée à la matrice nilpotente $-M^{-1}N$, $I_n - (-M^{-1}N) = I_n + M^{-1}N$ est une matrice inversible. Par produit de matrices inversibles, $M \times (I_n + M^{-1}N) = M + N$ est inversible.

   Réciproquement, supposons que $M + N$ est inversible. Alors en appliquant le sens direct que nous venons de démontrer à la matrice inversible $M + N$ et à la matrice nilpotente $-N$ (en notant que ces deux matrices commutent bien), il suit que $M = (M + N) - N$ est inversible.
