TD 17

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 17.1 (★)

Montrer que si A, B sont deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A+B$ et AB sont encore nilpotentes. Est-ce encore vrai si on ne suppose plus que A et B commutent ?

Exercice 17.2 (★★ - Matrices stochastiques)

Une matrice $A=(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\quad A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \forall i,j,\ a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.
   (b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.

Exercice 17.3 (★★★ - Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ - ✍)

On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$\mathscr{Z}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{Z}_2$?
3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice $M \in \mathscr{Z}_n$.
   (a) Pour tout $1 \leq i,j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
   (b) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (c) Conclure.

Exercice 17.4 (★★★ - Nilpotence des matrices triangulaires strictes - ✍)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur à n.

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A=(a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i+k > j.$$
   (a) Identifier $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$
   (b) Soient $k,\ell \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{T}_\ell^+(\mathbb{K})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}_{k+\ell}^+(\mathbb{K})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur à n.

Trace, transposée

Exercice 17.5 (★)

Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est symétrique si, et seulement si, $AB = BA$.

Exercice 17.6 (★★)

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 17.7 (★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}\left(A^\top A\right) = 0$ si, et seulement si, $A = 0_n$.

Exercice 17.8 (★★★)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 17.9 (★★★★ - Oral Mines 2023)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0_n$. Montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$\operatorname{tr}((A+B)^k) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k).$$

Matrices inversibles, algorithme du pivot de Gauss

Exercice 17.10 (★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice R échelonnée par lignes et une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que $EA = R$.

Exercice 17.11 (★★)

Calculer l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ E = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Exercice 17.12 (★★★)

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles en discutant suivant la valeur du paramètre réel α, calculer leur inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\alpha) & \operatorname{sh}(\alpha) \\ \operatorname{sh}(\alpha) & \operatorname{ch}(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.13 (★★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante - ✍)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Soit $X = (x_i) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Exercice 17.14 (★★★★)

Déterminer l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (dont la définition a été donnée à l'Exercice 17.2), inversibles et dont l'inverse est également stochastique.

Puissances et polynômes d'une matrice

Exercice 17.15 (★)

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.16 (★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.

Exercice 17.17 (★★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.
   (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_n et β_n. En déduire α_n et β_n en fonction de n.
   (d) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**
   (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.18 (★★)

Soient (x_n), (y_n), (z_n) trois suites réelles définies par $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{array} \right. .$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 17.19 (★★)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17.20 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale)
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ $(r \leqslant n)$ des scalaires distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$m_1 + \dots + m_r = n$$

On pose $D = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour toute fonction polynomiale P :
$$P(D) = \operatorname{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $Q^{-1}AQ = D$. Déterminer un polynôme annulateur de A.
4. À l'aide de l'Exercice 17.19, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 17.21 (★★★★)
Soient $n \geq 2$ et N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que N est nilpotente.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice matrice qui commute avec N. Montrer que M est inversible si, et seulement si, $M + N$ est inversible.
