TD 18

Dérivabilité

Dérivabilité, dérivées successives

Exercice 18.1 (★★)

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}; \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}; \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}.$$

Exercice 18.2 (★★)

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x^{n+1}+x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $g : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$;

(c) $h_\alpha : x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$;

Exercice 18.3 (★★)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ f(2x-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) la fonction φ est-elle dérivable ?

Exercice 18.4 (★★)

1. Montrer que $f : x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera.
2. Sans calculer f^{-1}, montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle à préciser et calculer $(f^{-1})'$.

Exercice 18.5 (★)

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

(a) $f_1 : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$;

(b) $f_2 : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$;

(c) $f_3 : x \mapsto \cos^3(x)$;

(d) $f_4 : x \mapsto e^x \sin(x)$;

(e) $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 18.6 (★★)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable telle que :

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 18.7 (★★)

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 18.8 (★★ - Une généralisation du théorème de Rolle)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. On pose :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(a) & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. (★) Proposer une autre preuve de l'existence d'un tel c sans passer par la fonction auxiliaire g.

Exercice 18.9 (★★★)

Soient $0 < a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe représentative de f où la tangente passe par l'origine.

Exercice 18.10 (★★★ - Règle de l'Hôpital)

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

   On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini, puis on pourra considérer $f - \lambda g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi.
2. En déduire que si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.
3. **Application.** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$.

Exercice 18.11 (★★★ - Théorème de Darboux)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On souhaite montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

1. Prouver le résultat lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
2. On suppose à présent que $a < b$ sont deux points de I, et que y est strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera que $f'(a) < y < f'(b)$.

   On note g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - xy$.

   (a) Montrer que g admet un minimum sur $[a, b]$, et que celui-ci n'est atteint ni en a, ni en b.

   (b) Conclure.

Exercice 18.12 (★★★)

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

1. À quel type de fonction f correspond le cas $M = 0$? On suppose dans la suite que $M > 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que :
$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x).$$
On pourra introduire la fonction $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ avec A tel que $g(x) = 0$.
3. En déduire que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$, puis que $|f'(a)| \leq \frac{M}{2}(b-a)$.

Exercice 18.13 (★★)

À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 18.14 (★★★)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.
On pourra commencer par se ramener au cas $\ell = 0$.

Exercice 18.15 (★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable ($n \geq 1$).

1. Prouver à l'aide d'un exemple que même si f admet une limite finie en $+\infty$, il se peut que f' n'admette pas de limite en $+\infty$.
2. Prouver que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Prouver que si f et $f^{(n)}$ admettent des limites finies en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 18.16 (★★)

On considère la fonction
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon} \end{cases}.$$
Peut-on déterminer a, b, c pour que f soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18.17 (★★★)

On note $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que
$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

3. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que la fonction g est elle aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et tracer l'allure du graphe de g.

Exercice 18.18 (★★)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x+1}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

Exercice 18.19 (★★)

À l'aide des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001} \approx 100, \quad \frac{1}{0,999^2} \approx 1, \quad \cos(1) \approx \frac{1}{2}.$$

Exercice 18.20 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et périodique. Prouver que f est lipschitzienne.

Exercice 18.21 (★★)

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\cos(u_n)}{2}.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique réel ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}\cos(\ell)$.
2. Montrer que $\ell \in [0,1]$.
3. Montrer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18.22 (★★★)

Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ une fonction et $a \in I$ un point fixe de f. On suppose I stable par f et on note $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in I$ la suite définie par $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $|f'(a)| < 1$.
   (a) Montrer l'existence de deux réels $K \in [0,1[$ et $\alpha > 0$ pour lesquels f est K-lipschitzienne sur $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$.
   (b) Étudier la nature de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$. On dit que le point a est *attractif* (pour f).
2. On suppose que $|f'(a)| > 1$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel $\alpha > 0$ pour lequel pour tout $x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$:
   $$x \neq a \implies |f(x) - f(a)| > |x - a|$$
   On dit que le point a est *répulsif* (pour f).
   (b) Quelle propriété très particulière la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle si elle converge vers a ?
