TD 2

Rappels et compléments calculatoires en analyse

Quelques révisions

Exercice 2.1 (★)

Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x et y sont des réels non nuls et $n \in \mathbb{N}$.

(i) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$;

(ii) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$;

(iii) $\dfrac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3}$;

(iv) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{9}\right)^5$;

(v) $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$;

(vi) $\dfrac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}}$.

Exercice 2.2 (★★★)

Soit $a \in [1, +\infty[$. Simplifier : $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

> Soit $a \in [1, +\infty[$. Notons $f(a)$ cette quantité, et remarquons qu'elle est bien définie car tous les termes sous les racines sont positifs. Calculons :
>
> $$\begin{aligned} f(a)^2 &= a + 2\sqrt{a-1} + a - \sqrt{a-1} + 2\sqrt{(a+2\sqrt{a-1})(a-2\sqrt{a-1})} \\ &= 2a + 2\sqrt{a^2 - 4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2} \end{aligned}$$
>
> On a alors deux cas à distinguer :
>
> - Si $a \geq 2$, alors $\sqrt{(a-2)^2} = a - 2$ et :
> $$f(a)^2 = 2a + 2(a-2) = 4a - 4 = 4(a-1).$$
>   Puisque $f(a)$ est positif (en tant que somme de termes positifs, puisqu'une racine carré est toujours positive), on conclut dans ce cas :
> $$f(a) = 2\sqrt{a-1}.$$
> - Si $a < 2$, alors $\sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = 2 - a$. Dans ce cas :
> $$f(a)^2 = 2a + 2(2-a) = 4.$$
>   Pour les mêmes raisons, on en déduit que $f(a) = 2$ dans ce cas.
>
> Résumons :
> $$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in [2, +\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [1, 2[\end{cases}.$$

Exercice 2.3 (★★)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\sqrt{x(x-3)} = 3x + 5$;

(ii) $e^{2x} + 2e^{1+x} = \dfrac{3}{e^{-2}}$;

(iii) $x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$

(iv) $\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \dfrac{8}{\ln(x)}$.

Exercice 2.4 (★★)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\dfrac{x-2}{2x+1} \leq -1$;

(ii) $2x^4 - 9x^2 + 4 < 0$;

(iii) $e^{2x} - e^x \leq 2$;

(iv) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.

Exercice 2.5 (★★)

Prouver que :

1. pour tout $x \in [0,1]$: $\quad 0 \leq \dfrac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leq 4$;
2. pour tout $x > 0$: $\quad \dfrac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \dfrac{16e^{-2}}{3}$;
3. (★) pour tous x, y dans $[1,2]$: $\quad \dfrac{2}{5} \leq \dfrac{x+y^2}{x^2+2y-y^2} \leq 6$.

1. Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$. Et donc :
$$0 \leq 2x \leq 2x+1+\cos(2x) \leq 2x+2 \leq 4.$$
D'autre part, $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq 2 - x^2 \leq 2$. En passant à l'inverse, on a donc $\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2-x^2} \leq 1$.
Et donc en multipliant les deux inégalités (toutes formées de nombres positifs) ainsi obtenues :
$$0 \leq \frac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leq 4.$$

2. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = t^2e^{-t}$, de sorte que $xe^{-\sqrt{x}} = \varphi(\sqrt{x})$. Alors φ est dérivable, de dérivée $\varphi' : t \mapsto t(2-t)e^{-t}$.
Il est alors aisé d'en dresser le tableau de variations, et de constater que φ possède un maximum en $t = 2$, égal à $\varphi(2) = 4e^{-2}$.
Donc déjà, pour $x > 0, xe^{-\sqrt{x}} \leq 4e^{-2}$.
De même, soit $\psi : t \mapsto t^2 - t + 1$. On peut par étude de cette fonction montrer qu'elle admet un minimum en $1/2$ qui vaut $\psi(1/2) = 3/4$. Plus rapideent, on peut aussi se souvenir qu'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ polynomiale de degré 2 admet un extremum en $-\frac{b}{2a}$ (maximum si $a < 0$, minimum si $a > 0$).
Et donc pour tout $x > 0, \ln(x)^2 - \ln(x) + 1 = \psi(\ln(x)) \geq \frac{3}{4}$. En passant à l'inverse, on obtient donc $\frac{1}{\ln(x)^2 - \ln(x)+1} \leq \frac{4}{3}$.
Il ne reste alors qu'à multiplier les inégalités pour conclure :
$$\forall x > 0, \quad \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{16e^{-2}}{3}.$$

3. **Méthode 1.** Essayons d'adopter une approche similaire à celle employée à la question précédente : $1 \leq y^2 \leq 4$ et donc $3 \leq 2x + y^2 \leq 6$.
De même, $1 \leq x^2 \leq 4$ et $2 \leq 2y \leq 4$ et $-4 \leq -y^2 \leq -1$.

On en déduit que $-1 \leq x^2 + 2y - y^2 \leq 7$.

On réalise alors que notre minoration est trop « brutale », puisqu'on souhaiterait n'avoir que des nombres positifs à la fin. Proposons donc une autre méthode.

Méthode 2. Essayons d'être plus subtils en étudiant la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(y) = 2y - y^2$. Sa dérivée est $f' : y \mapsto 2 - 2y = 2(1 - y) \leq 0$. Donc f est décroissante sur $[1, 2]$ et admet donc un maximum en 1, qui vaut $f(1) = 1$ et un minimum en 2 qui vaut $f(2) = 0$. Donc pour tout $y \in [1, 2]$, $0 \leq 2y - y^2 \leq 1$.

On en déduit que $1 \leq x^2 + 2y - y^2 \leq 5$, et donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x^2+2y-y^2} \leq 1$.

Enfin, en multipliant par l'encadrement du numérateur précédemment obtenu :

$$\frac{2}{5} \leq \frac{x + y^2}{x^2 + 2y - y^2} \leq 6.$$

Exercice 2.6 (★★★)

1. Montrer que l'ensemble suivant est borné : $E = \{\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1},\ n \in \mathbb{N}\}$.
2. Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles minorées, majorées ? Admettent-elles un maximum ou un minimum ?

$$A = \left\{\frac{n}{mn + 1},\ (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}, \quad B = \left\{\frac{n}{mn + 1},\ (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

1. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \geq 0.$$

En simplifiant par n :

$$\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{1 + 1/n}{\sqrt{1 + 1/n + 2/n^2} + \sqrt{1 + 1/n^2}} \leq \frac{2}{1 + 1} = 1.$$

Ainsi, E est minorée par 0 et majorée par 1. C'est donc une partie bornée.

2.
   - Pour A : Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{n}{mn + 1} \leq \frac{n}{mn} \leq \frac{1}{m} \leq 1.$$

Donc A est minorée par 0 et majorée par 1.

Montrons que A n'admet pas de minimum. Par l'absurde, supposons qu'il existe $M, N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{N}{MN + 1} \leq \frac{n}{mn + 1}.$$

En prenant $n = 1$, on obtient :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{N}{MN + 1} \leq \frac{1}{m + 1}.$$

En passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, $\dfrac{N}{MN + 1} \leq 0$ ce qui est impossible car $M, N \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que A n'admet pas de maximum. Par l'absurde, supposons qu'il existe $M, N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \geq \frac{N}{MN+1} \geq \frac{n}{mn+1}.$$

En prenant $m = 1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \geq \frac{N}{MN+1} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n}.$$

Par le théorème d'encadrement, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{N}{MN+1} = 1 \Leftrightarrow N = MN+1 \Leftrightarrow N(1-M) = 1 \underset{N\in\mathbb{N} \text{ et } 1-M\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} N = 1 \text{ et } M = 0,$$

ce qui est impossible car $M, N \in \mathbb{N}^*$.

- Pour B : Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{n}{mn+1}$ donc B est minorée par 0.

  C'est un minimum de B car, si $m = n = 0$, $\dfrac{0}{0 \times 0 + 1} = 0$.

  Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n = \dfrac{n}{0 \times n + 1} \in B$ donc $\mathbb{N} \subset B$. Ainsi, B n'est pas majorée.

Inégalités diverses

Exercice 2.7 (★★)

1. Montrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 \geq 4ab$.
2. En déduire que pour a et b strictement positifs, $\dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{4}$.
3. Montrer que pour x, y, z strictement positifs, $\dfrac{xy}{x+y} + \dfrac{xz}{x+z} + \dfrac{yz}{y+z} \leq \dfrac{x+y+z}{2}$.

1. Procédons par équivalences :

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

   Puisque cette dernière inégalité est trivialement vérifiée, on a bien $(a+b)^2 \geq 4ab$.

2. Puisque $(a+b)^2 \geq 4ab$, alors

$$\frac{(a+b)(a+b)}{4} \geq ab \underset{a+b>0}{\Leftrightarrow} \frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b}$$

3. En appliquant trois fois le résultat de la question précédente,

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}, \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4}, \frac{yz}{y+z} \leq \frac{y+z}{4}.$$

   En sommant ces trois inégalités, il vient

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{y+z}{4} \leq \frac{2x+2y+2z}{4} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

Exercice 2.8 (★★★)
Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. Démontrer que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

> On introduit la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Et pour tout $x > 0$:
>
> $$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2},$$
>
> avec $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
>
> La fonction g est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geq 0$:
>
> $$g'(x) = ab\ln(1+bx) + ab - ba\ln(1+ax) - ba = ab\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right) \geq 0.$$
>
> Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et puisque $g(0) = 0$, g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
> Puisque $0 < a \leq b$, on a $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. En appliquant f, on obtient $f(1/b) \leq f(1/a)$, soit :
>
> $$\frac{\ln(1+a\times 1/b)}{\ln(1+b\times 1/b)} \leq \frac{\ln(1+a\times 1/a)}{\ln(1+b\times 1/a)}.$$
>
> D'où finalement :
>
> $$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 2.9 (★★★)
Montrer par récurrence que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - nt \leq (1-t)^n \leq \dfrac{1}{1+nt}$.

> Comme indiqué, procédons par récurrence sur n. Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\forall t \in [0,1], 1-nt \leq (1-t)^n \leq \dfrac{1}{1+nt}$ ».
>
> $\boxed{\textbf{I}}$ Soit $t \in [0,1]$. On a évidemment $1 - t \leq (1-t)^1$ et
>
> $$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow (1-t)(1+t) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t^2 \geq 0$$
>
> ce qui est évidemment vrai. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
>
> $\boxed{\textbf{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons à présent que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soit $t \in [0,1]$.
>
> Par hypothèse de récurrence $(1-t)^n \geq 1 - nt$, ce qui après multiplication par $1 - t$ (qui

est positif) donne $(1-t)^{n+1} \geq (1-t)(1-nt)$. Mais :

$$(1-t)(1-nt) = 1-(n+1)t + \underbrace{nt^2}_{\geq 0} \geq 1-(n+1)t$$

Et donc $(1-t)^{n+1} \geq 1-(n+1)t$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, $(1-t)^n \leq \frac{1}{1+nt}$ et $1-t \leq \frac{1}{1+t}$. En multipliant ces deux inégalités (formées de nombres positifs) :

$$(1-t)^{n+1} \leq \frac{1}{1+nt}\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+(n+1)t+t^2} \leq \frac{1}{1+(n+1)t}.$$

La proposition est donc vérifiée au rang $n+1$

Par le principe de récurrence, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$:

$$1-nt \leq (1-t)^n \leq \frac{1}{1+nt}.$$

Exercice 2.10 (★★★)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

On pourra procéder par récurrence sur n.

3. (★) À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 2.11 (★★★★)

Soient x, y, z trois réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} \geq \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y}$. À quelle(s) condition(s) cette inégalité est-elle une égalité ?

Soient x, y et z trois réels strictement positifs.

Remarquons que $\frac{x}{z} = \frac{x}{y}\frac{y}{z}$ et donc $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}$. Et de même en permutant les rôles de x, y et z. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \\
\Leftrightarrow & 2\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y^2}{z^2} + 2\frac{z^2}{x^2} \geq 2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{x} + 2\frac{z}{y} \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}\right) + \left(\frac{y^2}{z^2} - 2\frac{y}{x} + \frac{z^2}{x^2}\right) + \left(\frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est triviale. De plus, il y a égalité dans l'inégalité de départ si, et seulement si :

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 0$$

Or une somme de nombres positifs est nulle si, et seulement si, chacun de ces nombres est nul,

donc si, et seulement si :
$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}, \frac{y}{z}=\frac{z}{x}, \frac{z}{x}=\frac{x}{y}$$
Soit encore si, et seulement si, $x^2=yz, y^2=xz$ et $z^2=xy$. Il vient alors $z=\frac{x^2}{y}$, donc en substituant dans $y^2=xz$, il vient $y^2=\frac{x^3}{y} \Leftrightarrow x^3=y^3$. Et donc $x=y$. On prouve de même que $y=z$, et donc $x=y=z$.
Inversement, il est clair que si $x=y=z$, alors l'inégalité de départ est une égalité.

Valeur absolue

Exercice 2.12 (★)

Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)^3+(-1)^{n-1}n^3|\leq n^4$.

Exercice 2.13 (★★)

Résoudre les équations suivantes :

(i) $x+|x|=\dfrac{4}{x}$;

(ii) $x|x|=3x+2$;

(iii) $|x^2-3x-7|=3$;

(iv) $|2x-4|=|x-1|$.

Exercice 2.14 (★★)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

(i) $|x+5|\geq|x^2-25|$;

(ii) $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$;

(iii) $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|>2$;

(iv) $x^2-4|x|+3>0$.

(i) Notons que $x^2-25=(x+5)(x-5)$ et donc $|x^2-25|=|x+5|\cdot|x-5|$.
Et donc l'inéquation s'écrit encore $|x+5|\geq|x+5|\cdot|x-5|$.
Pour $x\neq-5$, l'inéquation est donc équivalente à $|x-5|\leq1$, soit encore $-1\leq x-5\leq1 \Leftrightarrow 4\leq x\leq6$.
Enfin, -5 est solution de l'inéquation, donc l'ensemble des solutions est $\{-5\}\cup[4,6]$.

(ii) Notons pour commencer que l'équation a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On peut procéder par équivalence comme suit :
$$\sqrt{|x-3|}\leq x-1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x\mapsto x^2 \text{ strict. croiss.}} |x-3|\leq(x-1)^2 \text{ et } x-1\geq0.$$
On procède alors par disjonction de cas :

- si $x\geq3$, alors l'inéquation est équivalente à :
$$(x-3)\leq(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x+4\leq0$$
qui est faux pour tout $x\in\mathbb{R}$ car le discriminant de cette fonction polynomiale est strictement négatif.

- si $1 \leq x < 3$, l'inéquation est équivalente à :

$$(3-x) \leq (x-1)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-2) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-1,2].$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $[1,2]$.

(iii) Pour $x \neq -1$, $|x+1| > 0$ et donc

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > |x+1| \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

Puisque -1 avait été d'office exclu de l'ensemble des solutions, on trouve donc comme ensemble de solutions $]-\frac{3}{2},-1[\cup]-1,-\frac{1}{2}[$.

(iv) Il serait possible de distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, et de résoudre dans les deux cas un inéquation du second degré. Mais notons plutôt que $x^2 = |x|^2$, et donc en posant $X = |x|$, l'inéquation de départ s'écrit $X^2 - 4X + 3 > 0$. Mais le polynôme $X^2 - 4X + 3$ possède un discriminant égal à 4 et possède donc pour racines 1 et 3 . Ainsi :

$$X^2 - 4X + 3 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[.$$

Puisque d'autre part, $|x| \geq 0$, on a donc

$$x^2 - 4|x| + 3 > 0 \;\Leftrightarrow\; |x| \in [0,1[\cup]3,+\infty[\;\Leftrightarrow\; x \in]-\infty,-3[\cup]-1,1[\cup]3,+\infty[.$$

Exercice 2.15 (★★)

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x \geq y$, alors :

(a) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$ (b) $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

2. En déduire que, pour tout x, $y \in \mathbb{R}$:

(a) $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$ (b) $\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.

1. Prenons x et y des réels positifs tels que $x \geq y$. Alors :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\sqrt{x+y}\geq 0 \text{ et } \sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 0} x+y \leq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$
$$\Leftrightarrow x+y \leq x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{xy}.$$

Cette dernière inégalité étant satisfaite, il en est de même de celle de départ. Ainsi :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Utilisons cette inégalité pour obtenir les deux suivantes :

$$\sqrt{x} = \sqrt{(x-y)+y} \leq \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$$

par l'inégalité que nous venons de démontrer appliquée à y et $x-y \geq 0$. D'autre part, $x-y \leq x+y$ d'où par croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{x-y} \leq \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

en utilisant encore une fois la première inégalité démontrée.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, $|x+y| \leq |x|+|y|$, et par croissance de la fonction racine :
$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|},$$
la dernière inégalité provenant de la question précédente.
Pour la deuxième inégalité, supposons par exemple $|x| \geq |y|$, alors :
$$\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| = \sqrt{|x|}-\sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x|-|y|}.$$
Par la deuxième inégalité triangulaire :
$$|x|-|y| = ||x|-|-y|| \leq |x-y|.$$
D'où par croissance de la fonction racine carrée, puis en utilisant l'inégalité que nous venons d'établir :
$$\sqrt{|x|-|y|} \leq \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|x+(-y)|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|-y|} = \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}.$$
Ainsi :
$$\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}.$$

Exercice 2.16 (★★★)

Soient x et y des réels. Montrer les inégalités suivantes :

1. $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$. ;
2. $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$;
3. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$.

1. On écrit $2x = (x+y)+(x-y)$ et $2y = (x+y)-(x-y)$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient
$$2|x| \leq |x+y|+|x-y| \text{ et } 2|y| \leq |x+y|+|x-y|$$
Il suffit de sommer ces deux inégalités pour trouver le résultat voulu.
2. Posons $u = x-1$ et $v = y-1$. Alors
$$1+|xy-1| = 1+|uv+u+v| \leq 1+|u|+|v|+|uv| = (1+|u|)(1+|v|) = (1+|x-1|)(1+|y-1|).$$
3. Une rapide étude montre que la fonction $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. Puisque $|x+y| \leq |x|+|y|$, on en déduit que
$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

Partie entière

Exercice 2.17 (★)

Soient x et y deux nombres réels.

1. (a) Montrer que la fonction partie entière est croissante.
   (b) Est-ce que si $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ alors nécessairement $x \leq y$?
2. (a) A-t-on toujours $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?
   (b) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 2.18 (★★)

Résoudre l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2$ et l'inéquation $\left| \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \right| \leq 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

> Commençons par noter que le discriminant de $x^2 - x + 2$ est $-7 < 0$, de sorte que $x^2 - x + 2$ est de signe constant, positif. Ceci nous garantit que l'équation a bien un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors
>
> $$\begin{aligned} \left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 - x + 2} < 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \leq x^2 - x + 2 < 9 \end{aligned}$$
>
> On alors $4 \leq x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$. Un calcul de discriminant nous informe alors que cette inéquation est vérifiée si, et seulement si, $x \leq -1$ ou $x \geq 2$.
>
> De même, on a $x^2 - x + 2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 7 < 0$, ce qui est le cas si, et seulement si, $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$. Puisque $\sqrt{29} > 3$, $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < -1$, et de même $\frac{1+\sqrt{29}}{2} > 2$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left] \frac{1-\sqrt{29}}{2}, -1 \right] \cup \left[2, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right[$.
>
> Pour l'inéquation proposée, notons qu'on a
>
> $$\begin{aligned} \left| \left\lfloor x^2 - 4x - 3 \right\rfloor + 1 \right| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \left\lfloor x^2 - 4x - 3 \right\rfloor + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq \left\lfloor x^2 - 4x - 3 \right\rfloor \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 4x - 3 < 2. \end{aligned}$$
>
> Or on a $x^2 - 4x - 3 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$. Le polynôme $x^2 - 4x - 5$ possède un discriminant égal à $\Delta = 16 + 20 = 36$. Ses racines sont donc $x_1 = \frac{4+\sqrt{36}}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{36}}{2} = -1$.
> Et donc $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 5[$.
> De même, on a $x^2 - 4x - 3 \geq -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$. Ainsi, les deux conditions $-3 \leq x^2 - 4x - 3 < 2$ sont vérifiées simultanément si, et seulement si, $x \in]-1, 0] \cup [4, 5[$.
> Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-1, 0] \cup [4, 5[$.

Exercice 2.19 (★★★)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les relations suivantes :

1. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. *On pourra distinguer deux cas, suivant que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$ ou non.*
2. $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

1.
- Si $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \Leftarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ est un entier, $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ par définition de la partie entière. Ainsi :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor$$

Or $2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$ donc $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. Finalement :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

- Si $x - \lfloor x \rfloor \geq \frac{1}{2}$:

$$\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ donc } \lfloor x \rfloor + 1 \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \frac{3}{2} < \lfloor x \rfloor + 2.$$

Comme $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier, $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
Or, $2\lfloor x \rfloor + 1 \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$. Finalement,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

2. Par définition de la partie entière :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

D'où en multipliant par $n > 0$:

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

D'une part, puisque $n\lfloor x \rfloor$ est un entier plus petit que nx, et que $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que nx :

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor.$$

D'autre part :

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

Ainsi :

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n.$$

En divisant par $n > 0$:

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Cet encadrement permet de conclure que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2.20 (★★★)
Vérifier que pour tout entier naturel n : $\quad \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Astuce.

Pour montrer que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, nous allons montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$p \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \Leftrightarrow p \leq \sqrt{4n+2}.$$

En effet, la partie entière d'un réel x étant le plus grand entier plus petit que x, cela montrera l'égalité voulue.

On procède par double implication.

Pour le sens direct, prenons $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$. Si $p \leq 0$, $p \leq \sqrt{4n+2}$ est trivialement satisfait. Si $p \geq 0$, on obtient en élevant au carré :

$$p^2 \leq n+n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1+2\sqrt{(n+1)^2} = 4n+3.$$

Puisque cette inégalité est une inégalité d'entiers, on en déduit que :

$$p^2 \leq 4n+2 \quad \text{et donc} \quad p \leq \sqrt{4n+2}.$$

Réciproquement, soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq \sqrt{4n+2}$. De même, si $p \leq 0$, on a immédiatement $p \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$. Si $p \geq 0$, on obtient en élevant au carré :

$$p^2 \leq 4n+2.$$

Astuce.

Le carré d'un entier ne peut pas être congru à 2 modulo 4. En effet, si p est pair, il s'écrit de la forme $2k$, et donc $p^2 = 4k^2$ qui est congru à 0 mod 4. Si p est impaire, il s'écrit sous la forme $2k+1$, et donc $p^2 = 4k^2+4k+1$ est congru à 1 mod 4.

Puisque $p^2 \neq 4n+2$, on obtient $p^2 \leq 4n+1$. Alors (en reprenant les calculs faits plus haut) :

$$p^2 \leq (2n+1)+(2n) = (2n+1)+2\sqrt{n\times n} \leq (2n+1)+2\sqrt{n(n+1)} = \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2.$$

D'où en prenant la racine (tout est positif) : $\quad p \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$.

Finalement, on en déduit l'égalité : $\quad \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

Exercice 2.21 (★★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $n = \lfloor x\rfloor$.

1. Exprimer $\lfloor x-4\rfloor$ et $\lfloor 2x-1\rfloor$ en fonction de n. On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.
2. Résoudre l'équation $\lfloor x-4\rfloor = \lfloor 2x-1\rfloor$.

1. Comme $-4 \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x-4\rfloor = \lfloor x\rfloor - 4 = n-4$.

   D'autre part, $n \leq x < n+1 \Leftrightarrow 2n-1 \leq 2x-1 < 2(n+1)-1 \Leftrightarrow 2n-1 \leq 2x-1 < 2n+1$.

   - Si $x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right[$, alors $2n \leq 2x < 2n+1$ et donc $2n-1 \leq 2x-1 < 2n$ de sorte que

$\lfloor 2x-1 \rfloor = 2n-1$.

- Si $x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$, alors $2n+1 \leq 2x < 2n+2$ et donc $2n \leq 2x-1 < 2n+1$ de sorte que $\lfloor 2x-1 \rfloor = 2n$.

2. Soit $n = \lfloor x \rfloor$. Par disjonction des cas :

- Si $x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right[$, alors avec ce qui précède :
$$\lfloor x-4 \rfloor = \lfloor 2x-1 \rfloor \Leftrightarrow n-4 = 2n-1 \Leftrightarrow n = -3.$$
Donc $x \in \left[-3, -\frac{5}{2}\right[$.
- Si $x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$, alors
$$\lfloor x-4 \rfloor = \lfloor 2x-1 \rfloor \Leftrightarrow n-4 = 2n \Leftrightarrow n = -4.$$
Donc $x \in \left[-\frac{7}{2}, -3\right[$.

L'ensemble des solutions est donc $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right[$.

Exercice 2.22 (★★★★ - Oral Polytechnique)

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie de la manière suivante :
$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3, u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \ldots$$
Autrement dit, il s'agit d'une suite croissante d'entiers, et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, exactement k termes de la suite soient égaux à k. En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de u_n en fonction de n.

Si $u_n = k$ cela signifie que $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ont pris au moins toutes les valeurs $1, 2, \ldots, k-1$, les derniers termes avant u_n pouvant éventuellement être égaux à k.
Or, pour prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots, k-1$, il a fallu au moins $1+2+\cdots+(k-1)$ termes, de sorte que $n \geq 1+2+\cdots+k-1 = \dfrac{k(k-1)}{2}$.
Ceci signitie que le premier terme de la suite qui porte le numéro k est le terme d'indice $\frac{(k-1)k}{2}+1$ et que le dernier portant le numéro k est le terme d'indice
$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$
Ainsi, on a $u_n = k \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2}+1 \leq n < \frac{k(k+1)}{2}+1$. Or, $\frac{k(k+1)}{2}+1 > n \Leftrightarrow k(k+1)+2 > 2n \Leftrightarrow k^2+k+2-2n > 0$. À n fixé, il s'agit ici d'une expression polynomiale en k, dont le discriminant est $8n-7$, et dont les racines sont $k_1 = \frac{-1-\sqrt{8n-7}}{2}$ et $k_2 = \frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}$. Et donc $k^2+k+2-2n > 0$ si et seulement si $k > \frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}$ (on ne s'intéresse qu'aux k positifs).
De même, on a $\frac{k(k-1)}{2}+1 \leq n \Leftrightarrow k^2-k+2-2n \leq 0$ si et seulement si $k \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$. Or, $\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} - 1$. Et donc $u_n = k$ si et seulement si $k \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$ et $k+1 > \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
Puisque k est entier, nous reconnaissons là la définition d'une partie entière :

$$u_n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$