

**Rappels et compléments calculatoires en analyse**
**Quelques révisions**
**Exercice 2.1 (★)**

Simplifier au maximum les expressions suivantes, où  $x$  et  $y$  sont des réels non nuls et  $n \in \mathbb{N}$ .

(i) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$ ;	(iii) $\frac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3}$ ;	(v) $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$ ;
(ii) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$ ;	(iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^{12} \left(\frac{2}{9}\right)^5$ ;	(vi) $\frac{\sqrt{75} - 1}{\sqrt{27} + \sqrt{36}}$ .

**Exercice 2.2 (★★★)**

Soit  $a \in [1, +\infty[$ . Simplifier :  $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ .

**Exercice 2.3 (★★)**

Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

(i) $\sqrt{x(x-3)} = 3x + 5$ ;	(iii) $x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$
(ii) $e^{2x} + 2e^{1+x} = \frac{3}{e^{-2}}$ ;	(iv) $\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \frac{8}{\ln(x)}$ .

**Exercice 2.4 (★★)**

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

(i) $\frac{x-2}{2x+1} \leq -1$ ;	(iii) $e^{2x} - e^x \leq 2$ ;
(ii) $2x^4 - 9x^2 + 4 < 0$ ;	(iv) $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$ .

**Exercice 2.5 (★★)**

Prouver que :

1. pour tout  $x \in [0, 1]$  :  $0 \leq \frac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leq 4$  ;
2. pour tout  $x > 0$  :  $\frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{16e^{-2}}{3}$  ;
3. (★) pour tous  $x, y$  dans  $[1, 2]$  :  $\frac{2}{5} \leq \frac{x+y^2}{x^2+2y-y^2} \leq 6$ .

**Exercice 2.6 (★★★)**

1. Montrer que l'ensemble suivant est borné :  $E = \{\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$ .
2. Les parties de  $\mathbb{R}$  suivantes sont-elles minorées, majorées ? Admettent-elles un maximum ou un minimum ?

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1}, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{mn+1}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

## Inégalités diverses

### Exercice 2.7 (★★)

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $(a + b)^2 \geq 4ab$ .
  2. En déduire que pour  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ .
  3. Montrer que pour  $x, y, z$  strictement positifs,  $\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y+z}{2}$ .
- 

### Exercice 2.8 (★★★)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a \leq b$ . Démontrer que :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

*Indication : On pourra introduire la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ .*

---

### Exercice 2.9 (★★★)

Montrer par récurrence que pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 - nt \leq (1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$ .

---

### Exercice 2.10 (★★★)

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .
2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous réels strictement positifs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  :

$$(a_1 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

*On pourra procéder par récurrence sur  $n$ .*

3. (★) À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?
- 

### Exercice 2.11 (★★★★)

Soient  $x, y, z$  trois réels strictement positifs. Montrer que  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ . À quelle(s) condition(s) cette inégalité est-elle une égalité ?

---

## Valeur absolue

### Exercice 2.12 (★)

Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (-1)^{n-2}(n-1)^3 + (-1)^{n-1}n^3| \leq n^4$ .

---

### Exercice 2.13 (★★)

Résoudre les équations suivantes :

(i) $x +  x  = \frac{4}{x}$ ;	(iii) $ x^2 - 3x - 7  = 3$ ;
(ii) $x x  = 3x + 2$ ;	(iv) $ 2x - 4  =  x - 1 $ .

**Exercice 2.14 (★★)**

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{l|l} \text{(i)} \quad |x+5| \geq |x^2-25| ; & \text{(iii)} \quad \left| \frac{1}{x+1} \right| > 2 ; \\ \text{(ii)} \quad \sqrt{|x-3|} \leq x-1 ; & \text{(iv)} \quad x^2 - 4|x| + 3 > 0. \end{array}$$

**Exercice 2.15 (★★)**

1. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont deux réels positifs tels que  $x \geq y$ , alors :

$$\text{(a)} \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \text{(b)} \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. En déduire que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$\text{(a)} \quad \sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}, \quad \text{(b)} \quad \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

**Exercice 2.16 (★★★)**

Soient  $x$  et  $y$  des réels. Montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. \quad |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y| ; & 3. \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}. \\ 2. \quad 1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|) ; & \end{array}$$

**Partie entière****Exercice 2.17 (★)**

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels.

1. (a) Montrer que la fonction partie entière est croissante.  
(b) Est-ce que si  $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$  alors nécessairement  $x \leq y$  ?
2. (a) A-t-on toujours  $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$  ?  
(b) Montrer que  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ .

**Exercice 2.18 (★★)**

Résoudre l'équation  $\left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2$  et l'inéquation  $\left\lfloor x^2 - 4x - 3 \right\rfloor + 1 \leq 2$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2.19 (★★★)**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer les relations suivantes :

1.  $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ . On pourra distinguer deux cas, suivant que  $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$  ou non.
2.  $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ .

**Exercice 2.20 (★★★)**

Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  :  $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ .

---

**Exercice 2.21 (★★★)**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $n = \lfloor x \rfloor$ .

1. Exprimer  $\lfloor x - 4 \rfloor$  et  $\lfloor 2x - 1 \rfloor$  en fonction de  $n$ . On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.
  2. Résoudre l'équation  $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$ .
- 

**Exercice 2.22 (★★★★ - Oral Polytechnique)**

On considère une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3, u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \dots$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite croissante d'entiers, et telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , exactement  $k$  termes de la suite soient égaux à  $k$ . En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

---