TD 21

Polynômes

Premiers calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 21.1 (★★ - Valuation d'un polynôme - ✍)

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\operatorname{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n,\, a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer la valuation des polynômes X^2+1, X^4+3X, X^n.
2. Montrer que :

(i) si $P \neq 0$, $\operatorname{val}(P) \leq \deg(P)$;
(ii) $\operatorname{val}(\lambda \cdot P) = \operatorname{val}(P)$ pour tout $\lambda \neq 0$;
(iii) $\operatorname{val}(P+Q) \geq \min\{\operatorname{val}(P), \operatorname{val}(Q)\}$;
(iv) $\operatorname{val}(PQ) = \operatorname{val}(P) + \operatorname{val}(Q)$.

1. La valuation d'un polynôme P non nul est le degré du monôme de plus bas degré de P. En terme de suites, c'est l'indice du premier coefficient non nul de P. Ainsi :

$$\operatorname{val}(X^2+1) = 0,\ \operatorname{val}(X^4+3X) = 1,\ \operatorname{val}(X^n) = n.$$

2. (i) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul de degré n. Alors $a_n \neq 0$ par définition du degré, et par définition de $\operatorname{val}(P)$, $\operatorname{val}(P) \leq n = \deg(P)$.

(ii) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Si $P = 0$, c'est immédiat. Sinon, notons $m = \operatorname{val}(P)$. Par définition :

$$a_m \neq 0 \ \text{ et pour tout } k \leq m-1,\ a_k = 0.$$

Mais alors pour tout $\lambda \neq 0$:

$$\lambda a_m \neq 0 \ \text{ et pour tout } k \leq m-1,\ \lambda a_k = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{val}(\lambda P) = m = \operatorname{val}(P)$.

(iii) Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X_k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell$. Si l'un de ces polynômes est nul, c'est immédiat. Sinon, notons $m = \operatorname{val}(P)$ et $n = \operatorname{val}(Q)$. Pour tout $k < \min(m,n)$:

$$a_k + b_k = 0 + 0 = 0$$

par définition de la valuation. Ainsi, $\operatorname{val}(P+Q) \geq \min(m,n) = \min(\operatorname{val}(P), \operatorname{val}(Q))$.

(iv) Soient encore $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X_k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell$. Si l'un de ces polynômes est nul, c'est immédiat. Sinon, notons $m = \operatorname{val}(P)$, $n = \operatorname{val}(Q)$, et $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$. Pour tout

$k < m+n$, on obtient (quitte à prendre pour convention que $a_i = 0 = b_i$ lorsque $i < 0$) :

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ car } i<m} b_{k-i} + \sum_{i=m}^{k} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i<n} = 0.$$

Et pour $k = m+n$:

$$c_k = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ car } i<m} b_{k-i} + a_m b_n + \sum_{i=m+1}^{k} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i<n} = a_m b_n \neq 0.$$

Ainsi, $\mathrm{val}(P \times Q) = m+n = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Exercice 21.2 (★★ - Équations polynomiales)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

(i) $P'(X)^2 = 4P(X)$; | (ii) $P \circ P = P$; | (iii) $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 21.3 (★★ - Formule de Vandermonde)

Soient $m, n, r \in \mathbb{N}$. En développant de deux manières le produit $(1+X)^m(1+X)^n$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 21.4 (★)

Dans les cas suivants, calculer $A \wedge B$ et déterminer des polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.

(i) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.

(ii) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 2X + 2$.

Exercice 21.5 (★★)

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne :

(i) de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$; | (ii) de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 21.6 (★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21.7 (★★★)
Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$. En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :
$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

Exercice 21.8 (★★)
Montrer que pour $n, p \in \mathbb{N}^*$: $\quad (X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1.$

Exercice 21.9 (★★ - Deux questions indépendantes)
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $A \wedge B = 1$ si, et seulement si, $(AB) \wedge (A + B) = 1$.
2. Montrer que $A^2 \mid B^2$ si, et seulement si, $A \mid B$.

Exercice 21.10 (★★)
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $A_i = \prod_{j \neq i}^{n} (X - a_j)$.
Montrer que les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Sont-ils premiers entre eux deux à deux ?

Exercice 21.11 (★★★)
Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que si A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, alors A divise B dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que le PGCD de A et B dans $\mathbb{C}[X]$ est égal au PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?

> 1. Si A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, il existe $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = AS = AS + 0$.
>
>   Effectuons la division euclidienne de B par A dans $\mathbb{R}[X]$: il existe Q et R tels que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Et cette égalité peut être vue comme une égalité dans $\mathbb{C}[X]$.
>
>   Il apparait ici deux égalités qui correspondent à la division euclidienne de B par A dans $\mathbb{C}[X]$. Par unicité de cette division euclidienne, $S = Q \in \mathbb{R}[X]$ (et $R = 0$). Ainsi A divise B dans $\mathbb{R}[X]$.
>
> 2. Un premier argument serait de dire que l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{R}[X]$ peut être vu comme un algorithme d'Euclide entre polynômes complexe, et que le dernier reste non nul qui est le PGCD dans $\mathbb{R}[X]$ dans A et B, est aussi le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{C}[X]$. C'est donc aussi le PGCD dans $\mathbb{C}[X]$ de A et B.
>
>   Une autre méthode consiste à traiter tout d'abord le cas où A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$. Il existe alors U et V dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$. Mais cette égalité peut être vue comme une égalité de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ (toujours le même argument), et donc A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.
>
>   Dans le cas général, notons D le PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$. Il existe D, A_1 et B_1 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $A = A_1 D$, $B = B_1 D$ et A_1 et B_1 premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$. Toutes ces égalités peuvent être vues comme des égalités de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, et on vient de voir que A_1 et B_1 sont également premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, D est le PGCD de A et B dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Ce que nous enseigne la question précédente, c'est que la divisibilité dont il est question, a priori dans $\mathbb{R}[X]$, est aussi une divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$. Or, dans $\mathbb{C}[X]$, il est aisé de tester la divisibilité : elle se lit sur les racines.

   Les racines complexes de X^2+X+1 sont j et $\bar{j}=j^2$. Il s'agit donc de déterminer pour quelles valeurs de n j et j^2 sont des racines de $X^{2n}+X^n+1$. Étant conjugués, et $X^{2n}+X^n+1$ étant à coefficients réels, l'un sera racine si, et seulement si, l'autre l'est. On cherche donc les valeurs de n pour lesquelles $j^{2n}+j^n+1=0$.

   - Si $n \equiv 0\,[3]$, alors $j^n = j^{2n} = 1$, donc $1+j^n+j^{2n} = 3 \neq 0$.
   - Si $n \equiv 1\,[3]$, alors $j^n = j$, donc $j^{2n} = j^2$ et donc $1+j+j^2 = 0$.
   - Si $n \equiv 2\,[3]$, alors $j^n = j^2$ et $j^{2n} = j^4 = j$, de sorte que $1+j+j^2=0$.

   Donc X^2+X+1 divise $X^{2n}+X^n+1$ si, et seulement si, n n'est pas divisible par 3.

Racines

Exercice 21.12 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $X(X+1)(2X+1)$ divise $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.
2. Montrer que $(X-1)^3$ divise $B = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
3. Déterminer a et b pour que $C = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette la racine double 1. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$?

Exercice 21.13 (★★)

Soient $n \geq 2$ et $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} ... + \dfrac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $P - P'$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 21.14 (★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Prouver que toute racine rationnelle de P est dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt[k]{d}$ est soit entier, soit irrationnel.

1. Soit $r = \frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P, avec $p \wedge q = 1$.

   Notons alors $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et $a_n = 1$.

   Alors $0 = P(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i \dfrac{p^i}{q^i}$. Après multiplication par q^n, il vient donc $p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} = 0$.

   Mais q divise $\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i}$, et donc divise p^n. Puisque p et q sont premiers entre eux, q et p^n sont premiers entre eux, donc $q = 1$. Et par conséquent, $r = p \in \mathbb{Z}$.

2. $\sqrt[k]{d}$ est racine de $X^k - d$, qui est bien un polynôme unitaire à coefficients entiers. Donc soit c'est un irrationnel, soit il est rationnel, auquel cas la question 1 prouve qu'il s'agit d'un

entier.

Exercice 21.15 (★★)
Montrer que les seuls polynômes périodiques $P \in \mathbb{C}[X]$ (c'est-à-dire tels que il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X+k) = P(X)$) sont les polynômes constants.

Exercice 21.16 (★★)
La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle polynomiale ?

> Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \bar{z}$. Alors en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = x$. Donc $P - X$ s'annule en tous les réels, donc est nul. Et par conséquent, $P = X$. Mais alors pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\bar{z} = P(z) = z$, ce qui est absurde.
> Donc la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas polynomiale.

Exercice 21.17 (★★★)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Supposons P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer alors $P \wedge P'$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicité.

Exercice 21.18 (★★)

1. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que l'application $x \in \mathbb{C} \mapsto P(x) \in \mathbb{C}$ est surjective ? injective ?
2. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$?

Exercice 21.19 (★★★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
3. Montrer que L_n admet n racines réelles distinctes appartenant à $]-1,1[$.

Exercice 21.20 (★★★)
Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

> Il est évident que les polynômes constants conviennent.
> Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, tel que P' divise P. Alors P est scindé, notons n le nombre de ses racines distinctes, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ces racines et $m_1, \dots, m_n$ leur multiplicités. On a alors $P = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i = \deg P$.
> Puisque P' divise P, toutes les racines de P' sont racines de P. Autrement dit, les racines de P' sont parmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Or nous savons que λ_i est racine de P', de multiplicité $m_i - 1$ (avec cette multiplicité éventuellement nulle si λ_i n'est pas racine de P'). Et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (m_i - 1) = \deg P'$.

Soit encore $\sum_{i=1}^{n} m_i - n = \deg P - 1 \Leftrightarrow n = 1$.
Autrement dit, P possède une unique racine, et donc est de la forme $P = \alpha(X-\lambda)^k$.

Exercice 21.21 (★★★★ - D'après Centrale-Supélec)
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que si P est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

1. Si P est constant, c'est immédiat. Sinon, P a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0$, et par récurrence immédiate, α^{2^n} est racine de P pour tout n.

   Si $|\alpha| \neq 0, 1$, alors P admettrait une infinité de racines, ce qui est impossible si P n'est pas le polynôme nul. Ainsi $|\alpha| = 0$ ou 1.

   Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P, donc de module 1 d'après ce qui précède. En évaluant en $1+\alpha$, on obtient $P((1+\alpha)^2) = P(1+\alpha)P(\alpha) = 1$. Donc $(1+\alpha)^2$ est racine de P. Par ce qui a été fait précédemment, soit $1+\alpha = 0$ et alors $\alpha = -1$, soit $|1+\alpha| = 1$ et alors α appartient à l'intersection du cercle unité et du cercle de centre -1 et de rayon 1, c'est-à-dire $\alpha = j$ ou j^2.

   Finalement, l'ensemble des racines complexes de P est contenu dans $\{0, 1, j, j^2\}$.

2. Soit toujours P une solution de l'équation proposée dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de décomposition en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, et étant donné la question précédente, P se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, sous la forme :

   $$P = \lambda X^\alpha (X+1)^\beta (X-j)^\gamma (X-j^2)^\delta.$$

   où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$. On en déduit les décompositions suivantes (en se souvenant que $1+j+j^2 = 0$ et $j = j^4$) :

   $$P(X)P(X-1) = \lambda^2 X^{\alpha+\beta}(X-1)^\alpha (X+1)^\beta (X+j^2)^\gamma (X-j^2)^\delta (X-j)^\gamma (X+j)^\delta,$$

   $$P(X^2) = \lambda X^{2\alpha}(X-i)^\beta (X+i)^\beta (X-j^2)^\gamma (X+j^2)^\gamma (X-j)^\delta (X+j)^\delta.$$

   Par unicité, il vient :

   $$\begin{cases} \lambda^2 = \lambda \\ \alpha+\beta = 2\alpha \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \delta \end{cases}.$$

   Ainsi, $P = ((X-j)(X-j^2))^\gamma = (X^2+X+1)^\gamma$.

   Réciproquement, on vérifie sans difficulté que les polynômes de la forme $P = (X^2+X+1)^\gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{N}$ conviennent bien.

   Ainsi, les polynômes solutions de l'équation proposée sont exactement les polynômes $(X^2+X+1)^\gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{N}$.

Exercice 21.22 (★★★★)

Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^m-1)(X^n-1)$ divise $(X^{mn}-1)(X-1)$.
Ce résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont pas premiers entre eux ?

> Les racines de X^n-1 (resp. X^m-1) sont les racines $n^{\text{èmes}}$ (resp. $m^{\text{èmes}}$) de l'unité.
>
> Mais m, n étant premiers entre eux, il existe deux entiers p et q tels que $np+mq=1$. Et alors si $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$, alors $z = z^1 = z^{np+mq} = (z^n)^p (z^m)^q = 1$. Autrement dit, $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \{1\}$.
>
> Ainsi, $(X^n-1)(X^m-1)$ possède $n+m-1$ racines simples (qui sont les éléments différents de 1 de $\mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n$) et une racine double, qui est 1.
>
> D'autre part, 1 est racine $mn^{\text{ème}}$ de l'unité, donc racine de $X^{mn}-1$, et donc racine au moins double de $(X^{mn}-1)(X-1)$. De plus, si $z \in \mathbb{U}_m$, alors $z^{mn} = (z^m)^n = 1^n = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_{mn}$. Et de même si $z \in \mathbb{U}_n$.
>
> Ainsi, toutes les racines simples de $(X^n-1)(X^m-1)$ sont racines de $(X^{mn}-1)$. Et ce dernier polynôme est divisible par
>
> $$(X-1)^2 \prod_{z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X-z) \prod_{z \in \mathbb{U}_m \setminus \{1\}} (X-z) = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X-z) \prod_{z \in \mathbb{U}_m} (X-z) = (X^n-1)(X^m-1).$$
>
> Ce résultat ne vaut plus si m et n ne sont plus premiers entre eux : par exemple, pour $m=2$ et $n=4$, -1 est racine de X^2-1 et de X^4-1, donc est racine double de $\left(X^2-1\right)\left(X^4-1\right)$, alors qu'il n'est que racine simple de X^8-1. Donc $\left(X^2-1\right)\left(X^4-1\right)$ ne divise pas $(X-1)\left(X^8-1\right)$.

Factorisation

Exercice 21.23 (★)

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13$.

1. Montrer que $-i$ est une racine de P. Préciser son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21.24 (★★)

Montrer que $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ possède $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ comme racine double. En déduire sa factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

> On a :
>
> $$P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3\left(j^2+j+1\right) = 0.$$
>
> Donc j est racine de P. Par ailleurs, $P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$, et donc
>
> $$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12\left(j^2+j+1\right) = 0$$
>
> Donc j est racine de multiplicité au moins 2 de P. Notons que si j est racine double, alors $\bar{j}$ l'est aussi. Donc on a déjà 4 racines comptées avec multiplicité parmi les 8 que compte P.
>
> Puisque P est pair, $-j$ est aussi racine de P. Et même $-j$ est racine double, puisque si P est

> pair, alors P' est impair, et donc si x est racine de P', $-x$ l'est aussi. Mais si $-j$ est racine double, alors $\overline{-j} = -\bar{j} = -j^2$ l'est aussi.
> Donc nous avons bien un total de 8 racines lorsque comptées avec leurs multiplicités. Donc $P = 1(X-j)^2(X-\bar{j})^2(X+j)^2(X+\bar{j})^2$ est la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
> Puisque $(X-j)(X-\bar{j}) = X^2+X+1$ et $(X+j)(X+\bar{j}) = X^2-X+1$, la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc $P = \left(X^2+X+1\right)^2\left(X^2-X+1\right)^2$.

Exercice 21.25 (★★★)
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21.26 (★★★)
Soit n un entier strictement positif.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.
2. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p+1}$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 21.27 (★★★ - Polynômes de Tchebytchev - ✍)
On étudie pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer que si T_n existe, alors il est unique.
2. Vérifier que $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n existe et vérifie la relation
$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$
4. Déterminer la parité de T_n, son degré ainsi que son coefficient dominant.
5. Déterminer l'ensemble des racines de T_n, et en déduire sa décomposition en produits d'irréductibles.
6. En déduire que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2 T_n(x).$$

> 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que :
> $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos(\theta)) = Q_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
> Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(P_n - Q_n)(\cos(\theta)) = 0$ donc $P_n - Q_n$ a une infinité de racines (tous les réels appartenant à $[0,1]$). Donc $P_n - Q_n = 0$, c'est-à-dire $P_n = Q_n$.
> Ceci prouve l'$\boxed{\text{unicité du polynôme } T_n \text{ s'il existe}}$.

2. Posons $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_0(\cos(\theta)) &= 1 = \cos(0 \times \theta),\\
P_1(\cos(\theta)) &= \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta),\\
P_2(\cos(\theta)) &= 2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2 \times \theta).
\end{aligned}$$

Par unicité (question 1), $\boxed{T_0 = P_0 = 1,\ T_1 = P_1 = X \text{ et } T_2 = P_2 = 2X^2 - 1.}$

3. Nous allons prouver par récurrence sur n la propriété $\mathscr{P}(n)$: « T_n existe ».

I D'après la question précédente, T_0 et T_1 existent. Donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies.
Par hypothèse de récurrence, il existe deux polynômes T_n et T_{n+1} tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \text{ et } T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta).$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)\\
&= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta)\\
&= \cos((n+2)\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ est égal à $\cos((n+2)\theta)$ lorsqu'il est évalué en $\cos(\theta)$.
Le polynôme $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ convient. D'où l'existence et la propriété au rang $n+2$.

On conclut par principe de récurrence et on déduit de l'hérédité que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).}$$

4. Avec la question précédente, $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Ces premiers termes permettent de conjecturer la propriété $\mathscr{P}(n)$: « T_n est de même parité que n, de degré n et possède 2^{n-1} comme coefficient dominant ». Prouvons-la par récurrence (double) sur $n \geq 1$.

I $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies.
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X)\\
&= -2X(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X)\\
&= (-1)^{n+2}(2XT_{n+1}(X) - T_n(X))\\
&= (-1)^{n+2}T_{n+2}(X),
\end{aligned}$$

donc T_{n+2} est de même parité que $n+2$.

Toujours d'après la question précédente, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ avec $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n+2$ et $\deg(T_n) = n$. Donc $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n+2$.

Enfin, le coefficient de degré $n+2$ de T_{n+2} est celui de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire deux fois le coefficient dominant de T_{n+1}, donc $2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut par principe de récurrence.

5. Pour $x \in [-1,1]$, on a :

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos(\arccos(x))) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos(x)) = 0.$$

C'est le cas si et seulement si $n\arccos(x) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
Mais $0 \leq n\arccos(x) \leq n\pi$. Donc :

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ n\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Ainsi, les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$ sont les racines de T_n, deux à deux distinctes car cos est injective sur $[0,\pi]$.

Donc T_n possède n racines distinctes dans $[-1,1]$. Or T_n est de degré n, il est donc scindé à racines simples. Et donc :

$$\boxed{T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).}$$

6. Si n est impair, $T_n(0) = 0$ et donc avec la question précédente,

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0.}$$

Si n est pair, $T_n(0) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{n/2}$. Avec la question précédente,

$$2^{n-1}(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = (-1)^{n/2},$$

et donc

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(\cos(n\theta))'' = -n^2\cos(n\theta)$. Par définition des polynômes de Tchebytchev, on a donc

$$(T_n(\cos(\theta)))'' + n^2T_n(\cos(\theta)) = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}(T_n(\cos(\theta)))'' &= -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta)) \\ &= -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + (1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)).\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $-XT_n' + (1-X^2)T_n'' + n^2T_n$ a une infinité de racines (tous les réels appartenant à $[0,1]$). Il est donc nul et donc

$$\boxed{(X^2-1)T_n'' + XT_n' = n^2T_n.}$$

Exercice 21.28 (★★★)

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\mathscr{S}_1 \begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-3 \\ xyz=-2 \end{cases} \quad ; \qquad \mathscr{S}_2 \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases} .$$

Exercice 21.29 (★★★)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 0$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note s_k la somme des racines (comptées avec multiplicité) de $P^{(k)}$.

Montrer que $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ est une progression arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 21.30 (★★★★)

Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\prod_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} \left(\zeta^k - \zeta^\ell\right)$.

> Il s'agit de calculer
>
> $$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{\ell=0 \\ k \neq \ell}}^{n-1} \left(\zeta^k - \zeta^\ell\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^k \left(1 - \zeta^{\ell-k}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(\left(\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \zeta^k \right) \left(\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \left(1 - \zeta^{\ell-k}\right) \right) \right) \end{aligned}$$
>
> Or, $\left\{\zeta^{\ell-k}, 0 \leqslant \ell \leqslant n-1, l \neq k\right\} = \mathbf{U}_n \backslash \{1\}$, d'où :
>
> $$\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \left(X - \zeta^{\ell-k}\right) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$$
>
> et donc $\displaystyle\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \left(1 - \zeta^{\ell-k}\right) = n$. Donc :
>
> $$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(n\zeta^{k(n-1)}\right) = n^n \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^{-k} = n^n \zeta^{-(0+1+\cdots+(n-1))} = n^n \zeta^{-\frac{n(n-1)}{2}} = n^n e^{-i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1} n^n.$$

Polynômes de Lagrange

Exercice 21.31 (★★)

Soient $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

Exercice 21.32 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 21.33 (★★★★)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Fractions rationnelles

Exercice 21.34 (★★)

Décomposer en éléments simples :

$F_1 = \dfrac{X^3}{X^2 - 3X + 2}$ dans $\mathbb{R}[X]$;

$F_2 = \dfrac{X^3 + X^2 + 1}{X^3 + X^2 + X}$ dans $\mathbb{C}[X]$;

$F_3 = \dfrac{X}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{R}[X]$;

$F_4 = \dfrac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 2)}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21.35 (★★ - Un air de déjà vu - ✍)

1. Soit $P = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$ un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que : $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X - \alpha_i}$.
2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 21.36 (★★)

Montrer que $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_7} \frac{1}{2 - \omega} = \frac{448}{127}$.

Exercice 21.37 (★★★)

Soit $n \geq 2$. Donner la forme irréductible de la fraction $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega}$.

Exercice 21.38 (★★★ - Dérivée d'une fraction rationnelle)

1. Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de R.

   On appelle *dérivée de* R, et on note R' la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$.
2. Montrer que pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$, $(R + S)' = R' + S'$, $(RS)' = R' + S'$ et si S est non nulle, $\left(\dfrac{R}{S}\right)' = \dfrac{R'S - RS'}{S^2}$.
3. Étudier le degré de F' en fonction de celui de F.
4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction F de $\mathbb{K}(X)$ vérifiant $F' = 1/X$.