

## Développements limités

### Calculs de développements limités

#### Exercice 22.1 (★ - Des sommes)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f_1 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x), n = 4 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, n = 3 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x), n = 3 ;$$

$$f_4 : x \mapsto e^{-x} + \ln(1+x), n = 5.$$

#### Exercice 22.2 (★★ - Des produits)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{sh}(x) \tan(x), n = 3 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sin(x) \sqrt{1+x} \ln(1-2x), n = 4 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}, n = 3 ;$$

$$f_4 : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2) \arctan(x), n = 5.$$

#### Exercice 22.3 (★★★ - Encore des produits (en anticipant les ordres))

Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre  $n$ .

- $f_1 : x \mapsto \left( \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right) (\cos(x) - 1), n = 6 ;$

- $f_2 : x \mapsto (1 - \cos(2x))(e^{-x} - 1)(x - \sin(x)), n = 7.$

#### Exercice 22.4 (★★ - Des compositions)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f_1 : x \mapsto e^{\sin(x)}, n = 4 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{1 + \operatorname{sh}(x)}, n = 3 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(1 + \cos(x)), n = 3 ;$$

$$f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}, n = 3 ;$$

$$f_5 : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}, n = 3 ;$$

$$f_6 : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}, n = 3.$$

#### Exercice 22.5 (★★ - Des quotients)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}, n = 2 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)}, n = 4 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \operatorname{th}(x), n = 5 ;$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2}}{x \arctan(x)}, n = 5.$$

**Exercice 22.6 (★★ - Développements limités ailleurs que 0)**Calculer le développement limité des fonctions suivantes en  $a$  à l'ordre  $n$  :

$f_1 : x \mapsto \ln(x), a = e, n = 4 ;$

$f_2 : x \mapsto e^x, a = 1, n = 4 ;$

$f_3 : x \mapsto \cos(x), a = \frac{\pi}{3}, n = 4 ;$

$f_4 : x \mapsto \arcsin(x)^2, a = \frac{1}{\sqrt{2}}, n = 2 ;$

$f_5 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, a = 1, n = 3.$

**Exercice 22.7 (★★★ - Plus difficile)**Calculer le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre  $n$  :

$f_1 : x \mapsto (1 + \arctan(x))^{\frac{x}{\sin(x)^2}}, n = 2 ;$

$f_2 : x \mapsto e^{\cos(x)} \left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right), n = 5 ;$

$f_3 : x \mapsto \arctan(e^x), n = 3 ;$

$f_4 : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}, n = 4 ;$

$f_5 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)^2), n = 6 ;$

$f_6 : x \mapsto \frac{\ln(1 + e^x) - \ln(2)}{x \cos(x) \sqrt{1 - \sin(x)}}, n = 2.$

**Exercice 22.8 (★★★ - Développement limité de la fonction tangente)**

1. Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .
2. Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant  $\tan(\arctan(x)) = x$ .
3. Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant  $(\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^2$ .

**Exercice 22.9 (★★★)**Calculer le développement limité de  $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$  à l'ordre 4 au voisinage de 0.**Exercice 22.10 (★★)**Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $f(x) = 2 \tan(x) - x$ .

1. Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque impaire et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. Donner le  $DL_6(0)$  de  $f^{-1}$ . On rappelle que  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ .

**Applications des développements limités****Exercice 22.11 (★★★)**

Calculer les limites suivantes :

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} ;$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} ;$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2} ;$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^2}} ;$

(v)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} ;$

(vi)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}$  (où  $a > 0$ ).

**Exercice 22.12 (★★★)**

Déterminer des équivalents des suites suivantes :

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} ; \quad v_n = \frac{n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{e^{1/n^2} - 1} - 1 ; \quad w_n = \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \quad (a, b > 0).$$

**Exercice 22.13 (★★)**

Montrer que  $f : x \in ]0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$  se prolonge en une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Exercice 22.14 (★★ - Dérivation des développements limités)**

1. Soit  $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

(a) Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut prolonger  $f$  en une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

(b) La fonction dérivée de  $f$  admet-elle un développement limité en 0 ?

2. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle contenant 0.

Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la partie régulière du  $DL_n(0)$  de  $f'$  est obtenue en dérivant la partie régulière du  $DL_{n+1}(0)$  de  $f$ .

**Exercice 22.15 (★★ - Développement limité d'une solution d'une équation différentielle)**

Après avoir justifié qu'il existe une unique fonction  $y : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  solution de  $2(1+x)y' - y = e^x$  et qui s'annule en 0, déterminer le  $DL_4(0)$  de cette fonction.

**Exercice 22.16 (★★★)**

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le développement limité à l'ordre

$$n \text{ en } 0 \text{ de } x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

2. En exprimant le même développement limité d'une autre manière, déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le cardinal de l'ensemble  $\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid k + 2\ell = n\}$ .

**Exercice 22.17 (★★★)**

1. Déterminer le  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{1+t}$ . On notera  $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$  sa partie régulière.

2. Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $1 + X = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 + X^4Q(X)$ .

3. Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $N^4 = 0$ . Déterminer une racine carrée de  $I_n + N$ , c'est-à-dire une matrice dont le carré est  $I_n + N$ .

**Exercice 22.18 (★★★)**

Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ème en 0 de  $x \mapsto \arcsin(x)$ .

**Exercice 22.19 (★★)**

Déterminer pour les fonctions suivantes l'équation de la tangente en  $a$  et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente :

- $f_1 : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$  en  $a = 0$  ;
  - $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}(e^{\sin x} - 1)$  en  $a = 0$  ;
  - $f_3 : x \mapsto \sqrt{\tan x}$  en  $a = \frac{\pi}{4}$ .
- 

**Développements asymptotiques****Exercice 22.20 (★★)**

Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de  $+\infty$  des fonctions  $f$  suivantes, et déterminer leur position par rapport à  $\mathcal{C}_f$ .

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}e^{1/x} ; \quad \left| \quad f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \arctan(x).$$


---

**Exercice 22.21 (★★)**

Former un développement asymptotique en 0 de la fonction  $x \mapsto (ex)^x$  à la précision  $x^2 \ln^2(x)$ .

---

**Exercice 22.22 (★★★)**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $\tan(x) = x$  admet une unique solution dans  $I_n = ]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$  que l'on notera  $x_n$ . On définit ainsi une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ .
  2. Montrer que  $x_n \sim n\pi$ .
  3. Montrer que  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$ .
  4. Chercher un équivalent de  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ .
  5. Montrer que  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
- 

**Exercice 22.23 (★★★★)**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$x + \sqrt[3]{x} = n.$$

1. Montrer que cette équation possède une unique solution  $x_n$ .
  2. Déterminer la limite puis un équivalent simple de la suite  $(x_n)$ .
  3. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite  $(x_n)$ .
- 

**Exercice 22.24 (★★★★)**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ . Trouver  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

| Voir la [vidéo](#).

---