

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 23.1 (★)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$\begin{array}{ll}
 A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}; & G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)\}; \\
 B = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2 + 1)^2 \text{ divise } P\}; & H = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists k \in \mathbb{R}, u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{n}\}; \\
 C = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 2\}; & I = \{\text{suites réelles bornées}\}; \\
 D = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}; & J = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}); \\
 E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ } 2\pi\text{-périodique}\}; & K = \text{GL}_n(\mathbb{R}); \\
 F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ monotone}\}; & L = \{\text{matrices nilpotentes de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}.
 \end{array}$$

Exercice 23.2 (★★)

Dans les exemples suivants, démontrer que les sous-espaces F et G de E sont égaux.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $G = \text{vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, -2), (1, -4, 3))$;
3. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z - 2t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y + 7z - t = 0 \text{ et } x - 3y + 3z - 5t = 0\}$.

Exercice 23.3 (★★)

Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1, 2, 3)$;
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$;
3. $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

Exercice 23.4 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

En déduire que E n'est pas une réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est-à-dire distincts de E).

2. (★★) On suppose que E est de dimension finie et que $\mathbb{K}$ est infini (ce qui est évidemment le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

Familles de vecteurs

Exercice 23.5 (★)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées de E ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 0), (0, 1, 1)), E = \mathbb{R}^3 ;$$

$$\mathcal{F}_2 = ((0, -2, 1), (2, -1, -3), (1, 1, -2)), E = \mathbb{R}^3 ;$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 2)), E = \mathbb{R}^3 ;$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)), E = \mathbb{R}^3 ;$$

$$\mathcal{F}_5 = (f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \sin(x), f_3 : x \mapsto 1), E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ;$$

$$\mathcal{F}_6 = (f_1 : x \mapsto |x|, f_2 : x \mapsto |x - 1|, f_3 : x \mapsto |x + 1|), E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ;$$

$$\mathcal{F}_7 = ((X + k)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}, E = \mathbb{R}_n[X] ;$$

$$\mathcal{F}_8 = ((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{ où } a \neq b, E = \mathbb{C}_n[X].$$

Exercice 23.6 (★★)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 23.7 (★★★)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $v^{(k)}$ la suite définie par $v_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $(v^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de E .
2. Est-ce une base de E ? Déterminer $\text{Vect} \left((v^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \right)$.

Exercice 23.8 (★)

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de (a, b, c) dans cette base.
2. Mêmes questions avec $((1, -1, 1), (2, 1, -1), (-1, 3, 1))$.

Exercice 23.9 (★★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y + z = 0\} ;$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\} ;$$

$$C = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' - 2y' + 2y = 0\} ;$$

$$D = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, P = aX(X - 1) + bX^2 + c(X - 1) + d\} ;$$

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X + 1) = 2P(X)\} ;$$

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\} ;$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+2b+c & a-b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\};$$

$$H = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 23.10 (★★★)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $v_k = u_1 + \dots + u_k$.

1. Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si, et seulement si, la famille $(v_1, \dots, v_n)$ l'est.
2. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E si, et seulement si, $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E .

Exercice 23.11 (★★★)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E . On considère $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires, et on pose $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = e_k + y$. Déterminer à quelle condition la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Exercice 23.12 (★★★)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F .
3. Soit $P : X \mapsto 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. Montrer que P appartient à F , et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 23.13 (★★★ - 📌)

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\text{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n, a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer qu'une famille de polynômes graduée en valuation est libre.
2. Application. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\{X^k(1-X)^{n-k}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 23.14 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel et X une partie de E .

On dit que X est *génératrice minimale* de E si elle est génératrice, et que pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, si Y est génératrice de E et que $Y \subset X$, alors $Y = X$. On dit que X est *libre maximale* si elle est libre et que pour toute partie Y de E , si $X \subset Y$ et que Y est libre, alors $X = Y$.

Montrer que X est génératrice minimale si, et seulement si, elle est libre maximale, si, et seulement si, c'est une base de E .

Somme de sous-espaces

Exercice 23.15 (★★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

1. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
2. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$ où $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$;
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;
4. $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$, $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ de limite nulle}\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ constante}\}$;
5. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$, $G = \{g \in E \mid g \text{ impaire}\}$.

Exercice 23.16 (★★)

On considère trois sous-espaces vectoriels F, G, H d'un espace vectoriel E .

1. Comparer les sous-espaces $(F + G) \cap H$ et $(F \cap H) + (G \cap H)$.
2. Montrer que ces espaces sont égaux si $F \subset H$.

Exercice 23.17 (★★★)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $F' \oplus G = E$.

Exercice 23.18 (★★★★)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux à deux distincts dans $[0, 1]$. On pose :

$$F = \{f \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(a_i) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , puis déterminer un supplémentaire de F dans E .