

Fonctions convexes

Généralités

Exercice 24.1 (★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. À quelle condition $x \mapsto P(x)$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

Exercice 24.2 (★★ - Opérations sur les fonctions convexes)

1. Soient f et g deux fonctions convexes sur I . Montrer que $f + g$ est convexe sur I , et que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)f + \lambda g$ est encore convexe.
2. Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
3. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe alors f est convexe.

Exercice 24.3 (★★)

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow J$ une bijection convexe. Que dire de la convexité de f^{-1} ?

Exercice 24.4 (★★)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes sur un intervalle I .

1. Est-ce que $\max(f, g)$ est convexe ?
2. Est-ce que $\min(f, g)$ est convexe ?

Exercice 24.5 (★)

Étudier les variations des fonctions suivantes, leur convexité, les points d'inflexion, puis tracer leur courbe représentative.

$$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^x. \quad \mid \quad f_2 : x \mapsto e^{-x^2}. \quad \mid \quad f_3 : x \mapsto \sin(x) - x \cos(x).$$

Inégalités de convexité

Exercice 24.6 (★★)

Établir les inégalités suivantes :

- (i) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1.$
- (ii) $\forall x \in [0, 1], x \ln(2) \leq \ln(1 + x) \leq x.$
- (iii) $\forall x \in [0, 1], x + 1 \leq \exp(x) \leq (e - 1)x + 1.$
- (iv) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, 1], a^t b^{1-t} \leq ta + (1 - t)b.$

Exercice 24.7 (★★ - Inégalité arithmético-harmonique)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Exercice 24.8 (★★★★)

Soient α, β, γ les angles (non orientés) d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{1 + \sin(\alpha)} + \frac{1}{1 + \sin(\beta)} + \frac{1}{1 + \sin(\gamma)} \geq \frac{6}{2 + \sqrt{3}}.$$

Exercice 24.9 (★★★★)

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 24.10 (★★★★ - Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs.

1. Prouver que : $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$
 2. Montrer que la même inégalité reste valable pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels quelconques (non nécessairement positifs).
-

Comportement des fonctions convexes**Exercice 24.11 (★★)**

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante. Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.
-

Exercice 24.12 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local en a , alors f admet un minimum global en a .
2. Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?
3. On suppose de plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a .

Exercice 24.13 (★★)

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors f est identiquement nulle.
2. En déduire qu'une fonction convexe qui possède un minimum atteint ce minimum soit en un seul point, soit en une infinité de points.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 24.14 (★★★)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$.

1. On suppose dans cette question $a = 0$ et l'asymptote $\mathcal{D}$ horizontale.
 - (a) Montrer que f est décroissante. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
 - (b) On suppose de plus f dérivable. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
2. On ne suppose plus D horizontale.
 - (a) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
 - (b) On suppose de plus f dérivable. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a$.

Exercice 24.15 (★★★★)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Prouver que f est convexe si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

Exercice 24.16 (★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.
3. (a) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
(b) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
(b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.
5. Montrer que pour tout réel positif t : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.