TD 25

Dimension finie

Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 25.1 (★★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer la dimension.

$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$.

$$F_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

$F_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (X-1)P' - XP'' = 2P\}$.

$F_4 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

Exercice 25.2 (★★)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E est de dimension finie en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \times \dim_{\mathbb{C}} E$.

Exercice 25.3 (★★★)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodiques (c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$) est un espace vectoriel, et en déterminer la dimension.

Exercice 25.4 (★★★)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\displaystyle\max_{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$ et $\displaystyle\min_{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

Familles de vecteurs

Exercice 25.5 (★)

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 25.6 (★★)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $f_a : x \mapsto \sin(x+a)$, $f_b : x \mapsto \sin(x+b)$, $f_c : x \mapsto \sin(x+c)$ est liée dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 25.7 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0,n]\!]$. On pose $f_k : x \mapsto \cos^k(x)$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$.

1. Montrer que $\mathscr{F} = (f_0, \dots, f_n)$ et $\mathscr{G} = (g_0, \dots, g_n)$ sont deux familles libres de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   On pourra procéder par récurrence pour la famille $\mathscr{G}$.
2. Soit $F_n = \mathrm{Vect}\,(f_0, \dots, f_n)$ et $G_n = \mathrm{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f_k \in G_n$.
3. Montrer que $F_n = G_n$.

Exercice 25.8 (★★★)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X^n, (X+1)^n, \dots (X+n)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

> Voir la vidéo.

Exercice 25.9 (★★★ - Polynômes de Newton)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Vérifier que $P_k(m)$ est entier pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire tous les polynômes P prenant des valeurs entières sur chaque entier.

> 1. On reconnait une famille de polynômes réels étagés en degré. C'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.
> 2. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Plusieurs cas :
>   - Si $m \geq k$,
> $$P_k(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \binom{m}{k} \in \mathbb{N}.$$
>   - Si $0 \leq m \leq k-1$,
> $$P_k(m) = 0 \in \mathbb{N}.$$
>   - Si $m < 0$. On écrit $m = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et
> $$\begin{aligned} P_k(m) &= \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{p+k-1}{k} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
>
>   Dans tous les cas, les valeurs de $P_k(m)$ sont entières.
>
>   Raisonnons par Analyse-Synthèse :
>   - **Analyse.** Soit P un polynôme prenant des valeurs entières sur chaque entier. Comme la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
> $$P = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n.$$
>   En évaluant cette égalité en 0, on obtient $\lambda_0 = P(0)$ car 0 est racine de $P_1, \dots, P_n$ et que $P_0 = 1$. Donc $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$.
>   En évaluant en 1, on obtient $\lambda_0 + \lambda_1 = P(1)$ car 1 est racine de $P_2, \dots, P_n$ et que $P_1(1) = 1$. Donc $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$.
>   Successivement, on obtient $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i allant de 0 à n en évaluant en i et en exploitant que i est racine de $P_{i+1}, \dots, P_n$ et que $P_i(i) = 1$.

- **Synthèse.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $P = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n$. Il est clair que, comme les P_k prennent des valeurs entières sur chaque entier, P prend également des valeurs entières sur chaque entier.

Exercice 25.10 (★★★ - Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une matrice inversible ;

(ii) la famille formée par les colonnes de A est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;

(iii) la famille formée par les lignes de A est une base de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Exercice 25.11 (★★★★★ - Polynôme minimal d'une matrice)

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note I l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

1. Justifier que I n'est pas réduit au polynôme nul.
2. Montrer que I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et que pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in I$, $P \times Q$ appartient à I.
3. Montrer qu'il existe un polynôme non nul de I de degré minimal. Soit K un tel polynôme. Montrer que K divise tous les polynômes de I.
4. En déduire qu'il existe un unique polynôme annulateur de A, unitaire et de degré minimal.

   On l'appelle le *polynôme minimal de* A, et on le note π_A.
5. Montrer que $\mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \dots)$ est de dimension finie égale à $\deg(\pi_A)$.

Rang

Exercice 25.12 (★★)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (-1, 2, -1)$, $x_3 = (2, 3, 0)$, $x_4 = (1, 0, -1)$, $x_5 = (2, 1, -1)$;
2. $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;
3. $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

Exercice 25.13 (★★)

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$.
Montrer que (u, v, w, t) est générateur de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 25.14 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ des familles finies de E, $\mathscr{F}''$ la famille obtenue par concaténation de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$. Montrer que :

$$\max(\mathrm{rg}(\mathscr{F}), \mathrm{rg}(\mathscr{F}')) \leq \mathrm{rg}(\mathscr{F}'') \leq \mathrm{rg}(\mathscr{F}) + \mathrm{rg}(\mathscr{F}').$$

Somme de sous-espaces

Exercice 25.15 (★)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie, tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 25.16 (★★)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (0, 1, -1, 2)$, $b = (1, 3, 0, 2)$, $c = (2, 1, -3, 4)$, $d = (0, 0, 2, 1)$ et $e = (-1, 1, 0, 3)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(a, b, c)$ et $G = \mathrm{Vect}(d, e)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 25.17 (★★)
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 2y + 3z - t = 0 \end{cases}\right\}$, $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1))$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X], F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2 P(X)\}, G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}$.

Exercice 25.18 (★★)
1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de F, sa dimension et un supplémentaire.
2. Mêmes questions avec $G = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,\middle|\, \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

Exercice 25.19 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - ✍)

1. Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
2. En déduire que :
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 25.20 (★★★★ - Supplémentaire commun)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$.

1. Montrer que $F \bigcup G \neq E$. En déduire qu'il existe x appartenant à $E \setminus (F \bigcup G)$.
2. En raisonnant par récurrence sur $k = n - p$, montrer qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

Sous-espaces affines

Exercice 25.21 (★★)
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines.

$$\mathscr{F}_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=2 \\ 2x+y+2z=1 \end{array} \right. \right\}.$$

$$\mathscr{F}_2 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 1\}.$$

$$\mathscr{F}_3 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b\}.$$

$$\mathscr{F}_4 = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 2 \text{ et } f(2) = -3\}.$$

$$\mathscr{F}_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![1,n]\!],\ P(k) = \sqrt{k}\}.$$

Exercice 25.22 (★★)

Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathscr{F} = A+F$ et $\mathscr{G} = B+G$ deux sous-espaces affines de E. Montrer que :

(i) $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ si, et seulement si, $\left\{ \begin{array}{l} F \subset G \\ \overrightarrow{AB} \in G \end{array} \right.$.

(ii) $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \in F+G$.

(i) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$.
Comme $A \in \mathscr{F}$, on a aussi $A \in \mathscr{G}$ et donc $\overrightarrow{AB} \in G$ et $\mathscr{G} = A+G$.
De plus, pour tout $\overrightarrow{u} \in F$,

$$A + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F} \Rightarrow A + \overrightarrow{u} \in \mathscr{G} \Rightarrow \overrightarrow{u} \in G.$$

Donc $F \subset G$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $F \subset G$ et $\overrightarrow{AB} \in G$.
Soit $M \in \mathscr{F}$. Alors $\overrightarrow{AM} \in F \subset G$ et donc

$$M = B + \underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}}_{\in G} \in \mathscr{G}.$$

Donc $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$.

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$. Il existe donc $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\in G} \in F + G.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\overrightarrow{AB} \in F+G$. Il existe donc $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Posons $M = A + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}$. Alors :

$$M = A + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{v} = B + \underbrace{(-\overrightarrow{v})}_{\in G} \in \mathscr{G}.$$

Donc $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ et donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.

Exercice 25.23 (★★★)

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines disjoints d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Montrer qu'il existe deux sous-espaces affines $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$, parallèles et disjoints, contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Notons $\mathscr{F} = A + F$ et $\mathscr{G} = B + G$ et posons $\mathscr{F}' = A + (F + G)$ et $\mathscr{G}' = B + (F + G)$. Il est clair que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$, que $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}'$ et que $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$ sont parallèles.
Montrons que $\mathscr{F}' \cap \mathscr{G}' = \emptyset$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $M \in \mathscr{F}' \cap \mathscr{G}'$. Alors

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in F+G} + \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\in F+G} \in F + G.$$

Il existe donc $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Posons $M = A + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}$. Alors :

$$M = A + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{v} = B + \underbrace{(-\overrightarrow{v})}_{\in G} \in \mathscr{G}.$$

Donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$, ce qui est faux. Donc $\mathscr{F}' \cap \mathscr{G}' = \emptyset$.

Exercice 25.24 (★★★)
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G.

1. Montrer que si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est réduit à un point.
2. En déduire que, dans un espace de dimension 3, l'intersection d'un plan avec une droite non parallèle à ce plan est réduite à un point.

1. Notons $\mathscr{F} = A + F$ et $\mathscr{G} = B + G$.

   Si F et G sont supplémentaires, alors $\overrightarrow{AB} \in E = F + G$. Il existe donc $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Posons $M = A + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}$. Alors :

   $$M = A + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{v} = B + \underbrace{(-\overrightarrow{v})}_{\in G} \in \mathscr{G}.$$

   Donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.

   De plus, la direction de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est alors $F \cap G = \{0_E\}$, et donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton.

2. On considère ici $\mathscr{F} = A + F$ et $\mathscr{G} = B + G$ deux sous-espaces affines non parallèles avec $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$.

   Remarquons que $\dim(F \cap G) \leq \dim(G) = 1$. Si $\dim(F \cap G) = 1$, $F \cap G = G$ et donc $G \subset F$. Ceci est impossible car $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ne sont pas parallèles. Donc $\dim(F \cap G) = 0$ et $F \cap G = \emptyset$.

   Comme $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(E)$, F et G sont supplémentaires dans E. Avec la première question, $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est réduit à un point.

   Ainsi, dans un espace de dimension 3, l'intersection d'un plan avec une droite non parallèle à ce plan est réduite à un point.
