

## Séries numériques

## Études de convergence

## Exercice 26.1 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n(n + \ln(n))}$	f) $\sum \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$	l) $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
b) $\sum \left(n - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	g) $\sum \frac{\arctan(n)}{n^2}$	m) $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{10}$
c) $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$	h) $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$	n) $\sum \ln\left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 2n + 1}\right)$
d) $\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$	i) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$	o) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$
e) $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$	j) $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$	p) $\sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right)$
	k) $\sum \frac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$	

## Exercice 26.2 (★★)

Soient  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  deux séries convergentes à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

(i)  $\max(u_n, v_n)$  ;      |      (ii)  $u_n^2$  ;      |      (iii)  $\sqrt{u_n v_n}$  ;      |      (iv)  $\sqrt{u_n u_{2n}}$ .

(i) On utilise les inégalités suivantes, valables pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n.$$

Puisque  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent,  $\sum (u_n + v_n)$  converge également. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \max(u_n, v_n)$  converge.

(ii) Puisque  $\sum u_n$  converge, la suite  $(u_n)$  converge vers 0 (c'est la condition nécessaire de convergence des séries). À partir d'un certain rang, on dispose donc des inégalités  $0 \leq u_n \leq 1$ , de sorte que  $0 \leq u_n^2 \leq u_n$ . On conclut par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

(iii) On utilise l'inégalité classique, à connaître :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

D'où ici, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

On conclut comme pour le point (i).

(iv) De même qu'au point précédent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sqrt{u_n u_{2n}} \leq \frac{u_n + u_{2n}}{2}.$$

Justifions la convergence de la série  $\sum u_{2n}$ . Pour cela, remarquons que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{n=0}^N u_{2n} \leq \sum_{n=0}^{2N} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

La suite des sommes partielles de la série  $\sum u_{2n}$  est majorée (par  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ). Elle converge donc.

On conclut comme au point (iii) pour la convergence de  $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ .

**Exercice 26.3 (★★★ - Banque CCINP)**

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ .

On cherche un équivalent de la suite  $u_n$ . Pour cela, remarquons tout d'abord que  $e^{\frac{1}{n}} \sim 1$  et :

$$\ln(n^2 + n) = \ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln(n) \underbrace{\left[1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2 \ln(n)}\right]}_{\rightarrow 1} \sim 2 \ln(n).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \left[1 - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] \\ &= e \left[1 - \exp\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right)\right] \\ &= e \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= e \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

D'où par produit et quotient (ce qui est bien licite pour le calcul d'équivalent) :

$$u_n \sim \frac{e}{8n \ln(n)^2}.$$

On reconnaît le terme général d'une série de Bertrand. Rappelons la condition nécessaire et suffisante de convergence concernant ces séries (qu'il est bon de connaître).

**Rappel. Séries de Bertrand.**

La série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ).

La série de terme général  $\frac{e}{8n \ln(n)^2}$  étant convergente,  $\sum u_n$  converge également par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Si le résultat sur les séries de Bertrand n'est pas connu, ou si le jury demande de le démontrer le jour de l'oral (ce qu'il fera très probablement), on pourra procéder comme suit.

La fonction  $f : t \in [2, +\infty[ \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^2}$  étant continue, décroissante et positive, par comparaison série/intégrale, la série  $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$  est de même nature que la suite  $\left( \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^2} \right)_{n \geq 2}$ . Et pour tout  $n \geq 2$  :

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \left[ -\frac{1}{\ln(t)} \right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \rightarrow \frac{1}{\ln(2)}.$$

La série  $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$  converge donc.

### Exercice 26.4 (★★★ - Séries à paramètres)

Étudier la nature des séries suivantes suivant la valeur des paramètres :

- |  |   |
|--|---|
| <p>(i) <math>\sum \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}, p \in \mathbb{N}</math> ;</p> <p>(ii) <math>\sum \left[ \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n - 1 \right], \alpha \in \mathbb{R}</math> ;</p> <p>(iii) <math>\sum \frac{a^n}{1+b^n}, (a, b) \in \mathbb{R}_+^*</math> ;</p> | <p>(iv) <math>\sum (\arctan(n+a) - \arctan(n)), a \in \mathbb{R}_+^*</math> ;</p> <p>(v) <math>\sum \frac{n^a}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}, a \in \mathbb{R}_+^*</math> ;</p> <p>(vi) <math>\sum \arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right), \alpha &gt; 0</math>.</p> |
|--|---|

### Exercice 26.5 (★★)

Étudier la nature de la série  $\sum u_n$  dans les cas suivants :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| (i) $u_n = \frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$ ; | (ii) $u_n = \sin(n) \frac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}}$ ; | (iii) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n + 1}$ . |
|--|--|---|

### Exercice 26.6 (★★★)

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$  est un entier pair.
2. En déduire la nature de  $\sum \sin[\pi(1 + \sqrt{3})^n]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par la formule du binôme de Newton :

$$(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k = 2 \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} 3^\ell$$

est bien un entier pair, qu'on notera  $N_n$ . Alors :

$$\sin(\pi(1 + \sqrt{3})^n) = \sin(\pi N_n - \pi(1 - \sqrt{3})^n) = -\sin(\pi(1 - \sqrt{3})^n).$$

Mais  $(1 - \sqrt{3})^n \rightarrow 0$  puisque  $|1 - \sqrt{3}| < 1$ , et donc :

$$\left| \sin(\pi(1 + \sqrt{3})^n) \right| \sim \left| \pi(1 - \sqrt{3})^n \right| = \pi(\sqrt{3} - 1)^n.$$

On obtient ici le terme général d'une série géométrique convergente. Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \sin(\pi(1 + \sqrt{3})^n)$  est absolument convergente, donc convergente.

### Exercice 26.7 (★★★)

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$(i) u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n};$$

$$(ii) u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}};$$

$$(iii) u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1;$$

$$(iv) u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} \left(1 + \frac{\sin(n)}{n^{3/4}}\right)^{-1};$$

### Exercice 26.8 (★★★ - Banque CCP)

On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ .

1. Prouver que  $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série  $\sum u_n$  converge.
3. La série  $\sum u_n$  converge-t-elle absolument ?

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{n^2 + n + 1} &= n\pi\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= n\pi\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= n\pi\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'où le développement asymptotique voulu avec  $\alpha = \frac{3}{8}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série de terme général  $(-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n}$  converge par le critère spécial des séries alternées. Celle de terme général  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  est absolument convergente donc convergente. Par somme,  $\sum u_n$  converge.

3. Par le calcul précédent :

$$|u_n| \sim \left|(-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n}\right| = \frac{3\pi}{8n}$$

qui est le terme général d'une série divergente (multiple de celui de la série harmonique). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum |u_n|$  diverge, et la série  $\sum u_n$  ne converge pas absolument.

### Exercice 26.9 (★★★)

1. Justifier l'existence, pour  $n \in \mathbb{N}$ , de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$  et  $R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ .
- (b) En déduire que  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , puis la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} R_n$ .
3. Retrouver ce résultat à l'aide du critère spécial des séries alternées.

## Calculs de sommes

### Exercice 26.10 (★★)

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{(i)} \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n - 1}{n!} & \text{(iii)} \sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) \\ \text{(ii)} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} & \text{(iv)} \sum_{n \geq 2} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \end{array}$$

### Exercice 26.11 (★★)

On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Calculer alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

### Exercice 26.12 (★★ - Séries géométriques dérivées - )

On fixe un entier naturel  $p$  ainsi qu'un réel  $x$  tel que  $0 \leq x < 1$ .

- Démontrer que la série  $\sum_{k \geq p} \binom{k}{p} x^k$  converge. On pose  $S_p = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$ .
- Calculer  $x(S_p + S_{p+1})$ . En déduire une expression simple de  $S_p$  en fonction de  $p$  et  $x$ .
- En déduire la valeur de  $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p}$ .
- Application.** Établir la convergence et calculer la somme de  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n}{2^n}$  et  $\sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1)e^{-n}$ .

### Exercice 26.13 (★★ - Développement en série entière de arctan)

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrer que :  $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$ .
- En déduire que :  $\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .
- En déduire une condition nécessaire et suffisante de convergence de  $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$  et calculer sa somme.

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x^2 \neq 1$  de sorte que :

$$\sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{(-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}.$$

Ce qui se réécrit :

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}.$$

2. En intégrant l'égalité précédente entre 0 et  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

D'où :

$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| = \left| \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right|.$$

Si  $x \geq 0$ , on obtient par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Si  $x < 0$ , en procédant de même :

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_x^0 \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt = - \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq - \int_0^x t^{2n+2} dt = - \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

D'où l'inégalité voulue.

3. Supposons  $|x| \leq 1$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$  existe et vaut

$\arctan(x)$  par le théorème des gendarmes. En particulier, la série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$  converge si  $|x| \leq 1$ .

Supposons à présent  $|x| > 1$ . Alors :

$$\left| (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| = \frac{|x|^{2k+1}}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et la série  $\sum_{k \leq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$  diverge grossièrement.

Ainsi, la série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$  converge si, et seulement si,  $|x| \leq 1$ . Et en cas de convergence, sa somme vaut  $\arctan(x)$ .

### Exercice 26.14 (★★★)

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ .

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la série de terme général  $u_n$  soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

### Exercice 26.15 (★★★)

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{(i)} \sum_{n \geq 0} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \frac{n^2}{n!}; & \text{(iii)} \sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right); \\ \text{(ii)} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}; & \text{(iv)} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt. \end{array}$$

## Comparaisons séries-intégrales

### Exercice 26.16 (★★★ - Séries de Bertrand - 🐞)

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . On s'intéresse à la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ , qu'on appelle une *série de Bertrand*.

1. Montrer que la série diverge si  $\alpha < 1$ , et converge si  $\alpha > 1$ .
2. Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$  grâce à une comparaison série-intégrale.
3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ .

1. Supposons  $\alpha < 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Alors :

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \frac{n^\alpha \ln^\beta(n)}{n} = \frac{\ln^\beta(n)}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées ( $1 - \alpha > 0$ ). Ce qui se récrit :

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right).$$

Or, la série de terme général  $\frac{1}{n}$  est divergente et les deux séries sont à termes positifs, donc la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$  est également divergente.

On suppose à présent  $\alpha > 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Soit  $\gamma \in ]1, \alpha[$ . Alors :

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^\gamma}} = \frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées ( $\alpha - \gamma > 0$ ). D'où :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Or, la série de terme général  $\frac{1}{n^\gamma}$  est convergente (série de Riemann avec  $\gamma > 1$ ) donc, puisque par ailleurs toutes ces séries sont à termes positifs, la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$  est également convergente.

2. On va traiter différents cas selon la valeur de  $\beta$ .

Supposons  $\beta > 1$ . Effectuons une comparaison série-intégrale à l'aide de la fonction  $f : t \in ]1, +\infty[ \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^\beta}$ , clairement continue, positive et décroissante. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ .

Alors :

$$\forall t \in [n-1, n], \quad f(n) \leq f(t)$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_{n-1}^n f(n) dt \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

soit encore

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 3$ . En sommant l'inégalité précédente pour  $n \in \llbracket 3, N \rrbracket$ , on obtient :

$$\sum_{n=3}^N f(n) \leq \sum_{n=3}^N \int_{n-1}^n f(t) dt,$$

ce qui se réécrit par relation de Chasles sur les intégrales :

$$\sum_{n=3}^N f(n) \leq \int_2^N f(t) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_2^N f(t) dt &= \int_2^N \frac{1}{t} \ln^{-\beta}(t) dt = \left[ \frac{\ln^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1} \right]_2^N \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left( \frac{1}{\ln^{\beta-1}(N)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)} \right) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\sum_{n=3}^N f(n) \leq \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)}.$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$  est croissante et majorée. On en conclut que, pour  $\beta > 1$ , la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$  est convergente.

Supposons à présent  $\beta = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Comme précédemment, la décroissance de  $f$  donne l'inégalité

$$\forall t \in [n, n+1], \quad f(t) \leq f(n),$$

S'en suit par croissance de l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt$$

soit encore

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n).$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ . Sommons cette inégalité pour  $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$  :

$$\sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{n=2}^N f(n)$$

ce qui donne

$$\int_2^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=2}^N f(n).$$

Or,

$$\int_2^{N+1} f(t) dt = \int_2^{N+1} \frac{1}{\ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2))$$

d'où

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{n=2}^N f(n).$$

Puisque  $\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ , la suite des sommes partielles est divergente.

La série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$  est bien divergente.

Passons maintenant au cas où  $\beta < 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Alors :

$$\frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{1}{n \ln^\beta(n)}.$$

Or, la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$  est divergente donc la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$  est aussi divergente.

3. Nous disposons des implications suivantes :

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \implies \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge}$$

et :

$$\alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 1) \implies \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ diverge.}$$

Finalement, nous avons montré l'équivalence :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge} \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

### Exercice 26.17 (★★)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

1. Montrer que  $S_n \sim 2\sqrt{n}$ .

2. On pose  $w_n = S_n - 2\sqrt{n}$ .

(a) Déterminer deux constantes  $\alpha$  et  $K$  telles que  $w_n - w_{n-1} \sim \frac{K}{n^\alpha}$ .

(b) En déduire que la série de terme général  $w_n - w_{n-1}$  converge.

(c) En déduire l'existence d'une constante réelle  $\beta$  telle que :  $S_n = 2\sqrt{n} + \beta + o(1)$ .

1. Soit  $k \geq 1$ . Par croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$  et par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \sqrt{k} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{k+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

On intègre pour  $t$  allant de  $k$  à  $k+1$  (bornes croissantes) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt.$$

On calcule ces trois intégrales :

- $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_k^{k+1} 1 dt = \frac{1}{\sqrt{k}} [t]_k^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$
- $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$
- $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_k^{k+1} t^{-1/2} dt = \left[ \frac{t^{1/2}}{1/2} \right]_k^{k+1} = [2\sqrt{t}]_k^{k+1} = 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}.$

On a donc que pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

et donc

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}.$$

On somme ces inégalités pour  $k$  allant de 2 à  $n$  :

$$2 \sum_{k=2}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2 \sum_{k=2}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Par télescopage sur les membres de gauche et de droite, on obtient finalement :

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} \leq S_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2,$$

et donc

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

En divisant par  $2\sqrt{n} > 0$  :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme  $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  par continuité de la racine carrée et  $1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , on a par encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$  et donc  $S_n \sim 2\sqrt{n}$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= (S_n - 2\sqrt{n}) - (S_{n-1} - 2\sqrt{n-1}) = S_n - S_{n-1} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2} \end{aligned}$$

Or  $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} = \sqrt{n} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \sim 2\sqrt{n}$ . Par opération sur les équivalents, on a :

$$w_n - w_{n-1} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})^2} \sim \frac{-1}{4n^{3/2}}.$$

On a bien deux constantes  $\alpha = \frac{3}{2}$  et  $K = -\frac{1}{4}$  telles que  $w_n - w_{n-1} \sim \frac{K}{n^\alpha}$ .

(b) On sait que  $w_n - w_{n-1} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})^2} \sim \frac{-1}{4n^{3/2}}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$  converge car c'est une série de Riemann de paramètre  $3/2 > 1$ . Par comparaison de séries à termes négatifs,  $\sum_{n \geq 1} (w_n - w_{n-1})$  converge.

(c) Comme la série  $\sum_{n \geq 1} (w_n - w_{n-1})$  converge, la suite  $(w_n)$  converge également vers un réel  $\beta \in \mathbb{R}$ . Donc  $w_n = \beta + o(1)$  et finalement  $S_n = 2\sqrt{n} + \beta + o(1)$ .

### Exercice 26.18 (★★★)

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

$$(i) \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}; \quad \left| \quad (ii) \ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n); \quad \left| \quad (iii) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)). \right.$$

### Exercice 26.19 (★★★)

1. Soient  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ . Étudier la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{S_n}$ .

2. Soient  $\alpha > 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ . Étudier la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$ .

1. Supposons  $\alpha \in ]0, 1[$ . On part à la recherche d'un équivalent de  $S_n$  à l'aide d'une comparaison série/intégrale. Considérons pour cela la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

D'où en intégrant entre  $k$  et  $k+1$  :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

Soit  $n \geq 2$ . Sommons les inégalités précédentes pour  $k = 1, \dots, n-1$  :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k), \text{ qui se réécrit } S_n - 1 \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n - \frac{1}{n^\alpha}.$$

On en déduit :

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \leq S_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1.$$

Et puisque  $\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} \geq 0$  :

$$1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{n} \leq \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} S_n \leq 1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

Par théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} S_n$  existe et vaut 1. Ainsi :

$$\frac{1}{S_n} \sim \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{1-\alpha}}$  d'exposant  $1-\alpha < 1$  étant divergente, la série  $\sum \frac{1}{S_n}$  diverge par critère de comparaison des séries à termes positifs.

2. On suppose à présent  $\alpha > 1$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge dans ce cas, et la suite  $(S_n)$  admet une limite finie  $S > 0$ . Par conséquent,  $\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{R_n}{S}$ . Pour déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{R_n}{S_n}$ , on est amené à chercher un équivalent de  $R_n$ . On va procéder comme précédemment, par comparaison série/intégrale.

Soient  $n$  et  $N$  des entiers tels que  $1 \leq n \leq N$ . En reprenant les calculs précédents :

$$\sum_{k=n}^{N-1} f(k+1) \leq \int_n^N \frac{dt}{f(t)} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{N^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{N-1} f(k).$$

En passant à la limite quand  $N \rightarrow +\infty$  dans ces inégalités (tout converge) :

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n + \frac{1}{n^\alpha}.$$

D'où l'encadrement :

$$1 - \frac{\alpha-1}{n} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1} R_n \leq 1.$$

Par théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha-1)n^{\alpha-1} R_n$  existe et vaut 1. Ainsi :

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{S(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$  converge si, et seulement si,  $\alpha-1 > 1$ . Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \frac{R_n}{S_n}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

## Lien suite-série

### Exercice 26.20 (★★)

Soit  $(u_n)$  la suite récurrente définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
2. Étudier la convergence de la série  $\sum \ln(1 - u_n)$ .
3. Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$  ?

**Exercice 26.21 (★★★ - Oral Centrale)**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right)$ .

1. Étudier la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ .

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.

2. Établir l'existence de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  converge.

3. Montrer qu'il existe  $A \in \mathbb{R}^*$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} An^\alpha$ .

1. On a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left( \frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \right).$$

Mais  $\ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n+1}$ , et donc  $\frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

Donc en utilisant l'équivalent  $\ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1$ , il vient

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) - 1.$$

Mais

$$\frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n+1}{x} \left( \frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

On en déduit que

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{x}{2(n+1)} + o \left( \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{2n}.$$

Mais alors, par comparaison de séries dont le terme général est de signe constant (négatif au moins à partir d'un certain rang), la série de terme général  $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$  est divergente, nécessairement vers  $-\infty$  (c'est le théorème des suites monotones !).

Or  $\sum_{k=1}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$ .

Donc  $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  et donc  $u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

2. En reprenant les calculs précédents (en remplaçant les  $o \left( \frac{1}{n} \right)$  par des  $O \left( \frac{1}{n^2} \right)$ ),

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{x}{2(n+1)} + O \left( \frac{1}{n^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( -\frac{\alpha}{n} - \frac{x}{2(n+1)} \right) + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-2\alpha - x)n - 2\alpha}{2n(n+1)} + O \left( \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

On obtient un  $O \left( \frac{1}{n^2} \right)$  et donc le terme général d'une série convergente si  $\alpha = -\frac{x}{2}$ .

Ainsi, pour  $\alpha = -\frac{x}{2}$ , la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  converge.

3. Remarquons que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( \frac{k+1}{k} \right) = \ln(n).$$

Donc, en notant  $S$  la somme de la série de la question précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right) = \ln(u_n) - \ln(u_1) - \alpha \ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S.$$

Soit encore

$$\ln \left( \frac{u_n}{u_1 n^\alpha} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S.$$

Et donc, en composant par l'exponentielle (qui est continue), et en posant  $A = u_1 e^S > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} = A \quad \text{et donc} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} A n^\alpha.$$