

Séries numériques

Études de convergence

Exercice 26.1 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n(n + \ln(n))}$	f) $\sum \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$	l) $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
b) $\sum \left(n - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	g) $\sum \frac{\arctan(n)}{n^2}$	m) $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{10}$
c) $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$	h) $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$	n) $\sum \ln\left(\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 2n + 1}\right)$
d) $\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$	i) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$	o) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$
e) $\sum \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$	j) $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$	p) $\sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right)$
	k) $\sum \frac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$	

Exercice 26.2 (★★)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

(i) $\max(u_n, v_n)$; | (ii) u_n^2 ; | (iii) $\sqrt{u_n v_n}$; | (iv) $\sqrt{u_n u_{2n}}$.

Exercice 26.3 (★★★★ - Banque CCINP)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice 26.4 (★★★★ - Séries à paramètres)

Étudier la nature des séries suivantes suivant la valeur des paramètres :

(i) $\sum \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$, $p \in \mathbb{N}$;	(iv) $\sum (\arctan(n+a) - \arctan(n))$, $a \in \mathbb{R}_+^*$;
(ii) $\sum \left[\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n - 1\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$;	(v) $\sum \frac{n^a}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$;
(iii) $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$, $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$;	(vi) $\sum \arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

Exercice 26.5 (★★)

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

(i) $u_n = \frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$; | (ii) $u_n = \sin(n) \frac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}}$; | (iii) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n + 1}$.

Exercice 26.6 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
 2. En déduire la nature de $\sum \sin \left[\pi(1 + \sqrt{3})^n \right]$.
-

Exercice 26.7 (★★★)

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

(i) $u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$;	(iii) $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$;
(ii) $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$;	(iv) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} \left(1 + \frac{\sin(n)}{n^{3/4}} \right)^{-1}$;

Exercice 26.8 (★★★ - Banque CCP)

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$.

1. Prouver que $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
 2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
 3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?
-

Exercice 26.9 (★★★)

1. Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ et $R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

(b) En déduire que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis la nature de la série $\sum_{n \geq 0} R_n$.

3. Retrouver ce résultat à l'aide du critère spécial des séries alternées.
-

Calculs de sommes**Exercice 26.10 (★★)**

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

(i) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n - 1}{n!}$	(iii) $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$
(ii) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!}$	(iv) $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$

Exercice 26.11 (★★)

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 26.12 (★★ - Séries géométriques dérivées - 📌)

On fixe un entier naturel p ainsi qu'un réel x tel que $0 \leq x < 1$.

- Démontrer que la série $\sum_{k \geq p} \binom{k}{p} x^k$ converge. On pose $S_p = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.
 - Calculer $x(S_p + S_{p+1})$. En déduire une expression simple de S_p en fonction de p et x .
 - En déduire la valeur de $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p}$.
 - Application.** Établir la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n}{2^n}$ et $\sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1)e^{-n}$.
-

Exercice 26.13 (★★ - Développement en série entière de arctan)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que :
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
 - En déduire que :
$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$
 - En déduire une condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.
-

Exercice 26.14 (★★★★)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

- Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
 - Calculer alors la somme de cette série.
-

Exercice 26.15 (★★★★)

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

- | | |
|--|---|
| (i) $\sum_{n \geq 0} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \frac{n^2}{n!};$ | (iii) $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right);$ |
| (ii) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)};$ | (iv) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt.$ |
-

Comparaisons séries-intégrales**Exercice 26.16 (★★★★ - Séries de Bertrand - 📌)**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand*.

- Montrer que la série diverge si $\alpha < 1$, et converge si $\alpha > 1$.

- Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ grâce à une comparaison série-intégrale.
 - Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.
-

Exercice 26.17 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- Montrer que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.
 - On pose $w_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
 - Déterminer deux constantes α et K telles que $w_n - w_{n-1} \sim \frac{K}{n^\alpha}$.
 - En déduire que la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge.
 - En déduire l'existence d'une constante réelle β telle que : $S_n = 2\sqrt{n} + \beta + o(1)$.
-

Exercice 26.18 (★★★)

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

$$(i) \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n} ; \quad \left| \quad (ii) \ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n) ; \quad \right| \quad (iii) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 26.19 (★★★)

- Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{S_n}$.
 - Soient $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$.
-

Lien suite-série**Exercice 26.20 (★★)**

Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- Étudier la convergence de la suite (u_n) .
 - Étudier la convergence de la série $\sum \ln(1 - u_n)$.
 - Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
-

Exercice 26.21 (★★★ - Oral Centrale)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

- Étudier la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
 - Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.
 - Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} An^\alpha$.
-