TD 27

Applications linéaires

Généralités

Exercice 27.1 (★)

Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire ou non, et le cas échéant, déterminer une base de son noyau, ainsi que son rang et une base de son image si elle est de rang fini.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, x+y-3z) \end{array} \right. ;$$

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (4x+y, x-y, 2x+3y) \end{array} \right. ;$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, 4x-y, x+y+3z) \end{array} \right. ;$$

$$f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, 2xy, z+3y) \end{array} \right. ;$$

$$f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+i\bar{z} \end{array} \right. ;$$

$$f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(1)+P'+X \end{array} \right. ;$$

$$f_7 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P-(X+1)P' \end{array} \right. ;$$

$$f_8 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right. ;$$

$$f_9 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f-f' \end{array} \right. ;$$

$$f_{10} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(M)I_2 \end{array} \right. ;$$

$$f_{11} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^2+2M^\top \end{array} \right. ;$$

$$f_{12} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right. \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 27.2 (★★)

Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1)+P(X)$.

1. Soit $n \geq 0$. Montrer que φ induit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 27.3 (★★ - Opérateurs de décalage sur $\mathbb{K}^\mathbb{N}$)

On considère les applications L et R suivantes sur $\mathbb{K}^\mathbb{N}$:

$$L : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad R : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, a_0, a_1, \dots).$$

1. Montrer que L et R sont des endomorphismes de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
2. Calculer $L \circ R$. Les applications L et R sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer leur noyau et leur image.

Exercice 27.4 (★★)

Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), \quad f(1,1,0) = (1,0), \quad f(1,1,1) = (1,1).$$

Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ainsi que le noyau et l'image de f.

La famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$: elle est libre (démonstration laissée au lecteur) et de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$. D'après le cours, f existe et est unique (une application linéaire $f : E \to F$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de E).

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminons $a,b,c \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1).$$

Après résolution du système linéaire associé, on obtient $a = x - y$, $b = y - z$ et $c = z$. Donc :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f((x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)) \\ &= (x-y)f(1,0,0) + (y-z)f(1,1,0) + zf(1,1,1) \quad \text{(car } f \text{ linéaire)} \\ &= (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1) \\ &= (y, x-y+z) \end{aligned}$$

On détermine à présent le noyau de f :

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (y, x-y+z) = 0 \Leftrightarrow x = -z \text{ et } y = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(-z,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$. Remarquons que la famille $((-1,0,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ car elle est libre (un vecteur non nul) et génératrice.

On détermine enfin l'image de f. Avec le théorème du rang (on est en dimension finie),

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$$

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 27.5 (★★ - Interpolation de Lagrange - ✍)

Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, et $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ l'application définie par :

$$\varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

1. Montrer que φ est linéaire et préciser son noyau.
2. Notons φ_n la restriction de φ à $\mathbb{K}_n[X]$.
   (a) Montrer que φ_n réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
   (b) En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange associés à $x_0, \dots, x_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Soit $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
   (a) Exprimer l'unique polynôme P_0 de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $\varphi(P_0) = y$.
   (b) Exprimer en fonction de P_0 tous les polynômes P vérifiant $\varphi(P) = y$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, par linéarité de l'évaluation,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(x_0), (\lambda P + Q)(x_1), \dots, (\lambda P + Q)(x_n)) \\ &= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \lambda P(x_1) + Q(x_1), \dots, \lambda P(x_n) + Q(x_n)) \\ &= \lambda(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) + (Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

Déterminons son noyau.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0, x_1, \dots, x_n \text{ sont } n \text{ racines distinctes de } P \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow P \in \left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \right) \mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \right) \mathbb{K}[X]$.

2. (a) $\operatorname{Ker}(\varphi_n) = \operatorname{Ker}(\varphi) \cap \mathbb{K}_n[X] = \{0\}$. Donc φ_n est injective. Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathbb{K}^{n+1}) = n+1$, on en déduit que φ_n est bijective et c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

   (b) Rappelons que :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \in \mathbb{K}_n[X] \quad \text{ et } \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

   Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a donc

$$\varphi_n(L_i) = (0, \dots, 0, \underset{(i+1)^{eme} \text{ position}}{1}, 0, \dots, 0) = e_i.$$

   Comme $(e_0, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ (c'est la base canonique) et que φ_n est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, on en déduit $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (l'image d'une base par un isomorphisme est une base et on applique ici cette propriété à la base $(e_0, \dots, e_n)$ et à l'isomorphisme φ_n^{-1}).

3. (a) Comme φ_n est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi_n(P_0) = y$.
   Comme φ_n est la restriction de φ à $\mathbb{K}_n[X]$, P_0 est aussi l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi(P_0) = y$.
   Remarquons que l'image du polynôme $\sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ par φ est y (laissée au lecteur).
   Par unicité, on en déduit que $P_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

   (b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\varphi(P) = y$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(P) = y &\Leftrightarrow \varphi(P) = \varphi(P_0) \\ &\Leftrightarrow \varphi(P - P_0) = 0 \quad (\text{car } \varphi \text{ linéaire}) \\ &\Leftrightarrow P - P_0 \in \operatorname{Ker}(\varphi) = \left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \right) \mathbb{K}[X] \\ &\Leftrightarrow P = P_0 + \left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \right) \mathbb{K}[X]. \end{aligned}$$

> L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\varphi(P) = y$ est donc le sous-espace affine passant par P_0 et de direction $\operatorname{Ker}(\varphi) = \left(\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)\right)\mathbb{K}[X]$.

Exercice 27.6 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{K}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ stable par φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ.
   (a) Soit $P \in F$ un polynôme de degré d. Montrer que $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.
   (b) On note $p = \max\{\deg(P),\, P \in F\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}_p[X]$.

Exercice 27.7 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

> Montrons que $\operatorname{Ker}(f)$ est stable par g.
> Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors :
>
> $$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0,$$
>
> en utilisant que $f \circ g = g \circ f$ et que g est linéaire. Ainsi, $g(x) \in \operatorname{Ker}(f)$ et on a donc bien démontré que $\operatorname{Ker}(f)$ est stable par g.
>
> Montrons que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par g.
> Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors :
>
> $$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$
>
> Ainsi, $g(y) \in \operatorname{Im}(f)$. On a bien démontré que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par g.

Exercice 27.8 (★★)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9\mathrm{id}_E = 0$. On pose $u = 2f + 3\mathrm{id}_E$ et $v = f - 3\mathrm{id}_E$.

1. Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.
2. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$ et $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(u)$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v)$.

> 1. Après simplification, $u - 2v = 9\mathrm{id}_E$.
>
>   On en déduit que, pour tout $x \in E$,
>
> $$x = \frac{1}{9}u(x) + \left(-\frac{2}{9}\right)v(x) \in \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v).$$
>
>   Donc $E \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$. L'inclusion réciproque est évidente car $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Im}(v)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
>
>   Finalement, $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v)$.

2. On a :

$$u \circ v = (2f + 3\mathrm{id}_E) \circ (f - 3\mathrm{id}_E) = 2f^2 - 3f - 9\mathrm{id}_E = 0$$
$$v \circ u = (f - 3\mathrm{id}_E) \circ (2f + 3\mathrm{id}_E) = 2f^2 - 3f - 9\mathrm{id}_E = 0$$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0$ et donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$. Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

De même, on montre que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

3. Avec les deux questions précédentes, on a :

$$E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Ker}(u) \subset E.$$

Donc $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.

De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$,

$$x = \frac{1}{9}u(x) + \left(-\frac{2}{9}\right) v(x) = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est évidente car $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$.

Finalement, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

Exercice 27.9 (★★★)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

1. Montrons que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Comme $y = f^2(x) = f(f(x))$, $y \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Soit $z \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $z = f(y)$. Comme $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$, il existe $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et $y_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ tels que $y = y_1 + y_2$. On a donc $z = f(y) = f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2) = f(y_1)$ car f est linéaire et $y_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$. Finalement, $z = f(y_1) = f(f(x_1)) = f^2(x_1)$ et donc $z \in \mathrm{Im}(f^2)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
Finalement, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Montrons que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. Alors, par linéarité de f, $f(x - f(y)) = 0$ et donc $x - f(y) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Finalement, $x = (x - f(y)) + f(y)$ avec $x - f(y) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$.
Donc $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0$. Comme f est linéaire, $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Comme $f(x) \in \text{Im}(f)$, $f(x) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Donc $f(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Finalement, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Montrons que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

$0 \in \text{Im}(f)$ et $0 \in \text{Ker}(f)$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0 \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Ainsi $\{0\} \subset \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Comme $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in \text{Ker}(f)$, $f(y) = 0$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$. Donc $y = f(x) = 0$. Ainsi, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \subset \{0\}$.

On a donc $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 27.10 (★★★)

Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) l'ensemble F des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

(ii) l'ensemble G des suites p-périodiques avec $p \geq 1$.

(iii) l'ensemble H des suites arithmétiques.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 27.11 (★★ - ✍)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que f est nilpotent, d'indice de nilpotence p (c'est-à-dire tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$). On souhaite prouver que $p \leq n$.
   (a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
   (b) Montrer qu'alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   (c) Conclure.
2. On suppose à présent que pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0_E$. Montrer que f est nilpotente. Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus E de dimension finie ?

Exercice 27.12 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, et que $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$. Montrer que pour tout $k \leq n$, $\dim\left(\text{Ker}(u^k)\right) = k$.

Rang d'une application linéaire

Exercice 27.13 (★★)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

2. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ lorsque $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ et $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 27.14 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient u, v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$

Prouver que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires dans E, et que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 27.15 (★★★ - Oral CCINP 2023 (MP))

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que cf est un projecteur ;
   (ii) $f \circ f \neq 0$;
   (iii) $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

> Voir la vidéo.

Exercice 27.16 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = F$ et $\mathrm{Ker}(u) = G$.

Exercice 27.17 (★★★★ - Inégalité de Sylvester)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)).$$

Projecteurs, symétries, homothéties

Exercice 27.18 (★)

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-9x + 6y, -15x + 10y, -5x + 3y + z).$$

   Montrer que f est un projecteur sur un sous-espace F parallèlement à un sous-espace G que l'on déterminera.

2. Déterminer l'expression de la symétrie g par rapport à G dans la direction de F.

Exercice 27.19 (★★)

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,2,3)$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.
2. Donner l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.
3. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à G et parallèlement à F.

Exercice 27.20 (★★ - ✍)

1. À l'aide d'un raisonnement par Analyse - Synthèse, montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit p le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, q le projecteur associé. Déterminer $p(M)$ et $q(M)$ en fonction de M et $M^\top$.

Exercice 27.21 (★★)

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ qui à P associe R, reste de la division euclidienne de P par A.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

> 1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En effectuant la division euclidienne de P_1 et P_2 par $A \neq 0$, il existe deux uniques couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tels que
>
> $$\begin{cases} P_1 = AQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(A) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_2 = AQ_2 + R_2 \\ \deg(R_2) < \deg(A) \end{cases}$$
>
> Alors $\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ et
>
> $$\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(A).$$
>
> Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par A,
>
> $$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$
>
> L'application f est donc linéaire.
>
> 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. En effectuant la division euclidienne de P par $A \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tel que
>
> $$\begin{cases} P = AQ + R \\ \deg(R) < \deg(A) \end{cases}$$

Comme $R = A \times 0 + R$ et $\deg(R) < \deg(A)$, on a par unicité dans la division euclidienne que $f(R) = R$ et donc $f(f(P)) = f(P)$.

Ainsi, f est linéaire et vérifie $f \circ f = f$. Donc f est un projecteur.

Pour l'image de f, on a déjà l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ (puisque le degré du reste est strictement inférieur au degré de A).

Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors $P = A \times 0 + P$ et $\deg(P) < \deg(A)$. Par unicité dans la division euclidienne, $P = f(P) \in \mathrm{Im}(f)$.

Finalement, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Pour le noyau de f,

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow A \mid P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = AQ \Leftrightarrow P \in A\mathbb{K}[X].$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = A\mathbb{K}[X]$.

Exercice 27.22 (★★★)

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$ où $n = \dim(E)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

On remarque que

$$f^2 = f \circ (\mathrm{id}_E - g) = f - f \circ g \quad \text{et} \quad g^2 = (\mathrm{id}_E - f) \circ g = g - f \circ g.$$

Donc les applications linéaires f et g sont des projecteurs si et seulement si $f \circ g = 0$.

Avec le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) \geq \mathrm{rg}(g).$$

De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $x = f(x) + g(x) = g(x) \in \mathrm{Im}(g)$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq \mathrm{rg}(g)$. Finalement, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(g)$.
Comme $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$, on obtient que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

Pour tout $x \in E$, $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ et donc $(f \circ g)(x) = 0$. Finalement, $f \circ g = 0$ et donc f et g sont des projecteurs.

Exercice 27.23 (★★)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer qu'alors :

$$\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \ \text{ et } \ \mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$

Exercice 27.24 (★★★)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.

Montrer que p et u commutent si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

Exercice 27.25 (★★★)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :

$$\begin{cases} p\circ q = p \\ q\circ p = q \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \begin{cases} p\circ q = q \\ q\circ p = p \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q).$$

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $x \in \operatorname{Ker}(p)$, $q(x) = q\circ p(x) = q(0) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(q)$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(p) \subset \operatorname{Ker}(q)$. On peut démontrer de la même façon que $\operatorname{Ker}(q) \subset \operatorname{Ker}(p)$ en échangeant les rôles de p et q. On a donc l'égalité $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ p est un projecteur donc $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
   Soit $x \in E$. Il existe $x_1 \in \operatorname{Ker}(p)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(p)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$, on a alors :

   $$(q\circ p)(x) = q(p(x)) = q(\underbrace{p(x_1)}_{=0} + \underbrace{p(x_2)}_{=x_2}) = q(x_2) = \underbrace{q(x_1)}_{=0} + q(x_2) = q(x).$$

   Donc $q\circ p = q$.
   On peut démontrer de la même façon que $p\circ q = p$ en échangeant les rôles de p et q.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $y \in \operatorname{Im}(q)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Alors, comme $p\circ q = q$, $y = q(x) = (p\circ q)(x) = p(q(x)) \in \operatorname{Im}(p)$. Donc $\operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p)$.
   De la même façon, $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(q)$ et finalement $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x \in E$. Comme $p(x) \in \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)$, il existe $y \in E$ tel que $p(x) = q(y)$. Alors $(q\circ p)(x) = q(p(x)) = q(q(y)) = q(y) = p(x)$. Donc $q\circ p = q$.
   De la même façon, $p\circ q = p$.

Exercice 27.26 (★★★ - Caractérisation des homothéties - ✍)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique scalaire $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
2. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.
   (a) Montrer que si x et y sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (b) Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x$. En déduire que $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Déduire de ce qui précède que f est une homothétie.

Exercice 27.27 (★★★★ - ✍)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Quel est le centre de $\mathrm{GL}(E)$?

Soit f un élément du centre de $\mathrm{GL}(E)$, et soit $x \in E$ un vecteur non nul. Considérons H un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x)$ (existe car on est en dimension fini), et s la symétrie par rapport à H dans la direction de $\operatorname{Vect}(x)$. s appartient à $\mathrm{GL}(E)$, car par exemple $s\circ s = \mathrm{id}_E$, et commute donc avec f. Et il en est de même de $s + \mathrm{id}_E$. Par l'**Exercice 27.7**, $\operatorname{Vect}(x) = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ est stable par f.

On vient donc de montrer que toute droite vectorielle est stable par f. Par l'**Exercice 27.26**, f est une homothétie vectorielle $\lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 0$ puisque f bijective.

Réciproquement, une homothétie vectorielle $\lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 0$ est bien dans le centre de $\mathrm{GL}(E)$.

Ainsi, le centre de $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de rapport $\lambda \neq 0$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 27.28 (★★★ - Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$.
   Montrer que φ_A définit une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.
   (a) Montrer que Φ est linéaire.
   (b) Montrer que Φ est un isomorphisme.
   Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
   (c) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Déterminer toutes les formes linéaires φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant :
$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

Exercice 27.29 (★★★)

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un espace vectoriel G et une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, G)$ et $b \in G$ tels que $\mathscr{F} = \{x \in E \mid f(x) = b\}$.

Exercice 27.30 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On suppose que :
$$\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}), \quad f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$
   Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
2. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 27.31 (★★★ - Isomorphisme canonique entre E et son bidual - ✍)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $(E^*)^* = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{K})$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $\varphi_x : f \in E^* \mapsto f(x)$ est une forme linéaire sur E^*.
2. Montrer que $\varphi : x \in E \mapsto \varphi_x \in (E^*)^*$ est un isomorphisme de E sur son bidual $(E^*)^*$.

Exercice 27.32 (★★★★ - Oral ENS)

Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'hyperplans dans un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension n ?
