

## Représentation matricielle en algèbre linéaire

### Matrice d'une application linéaire

#### Exercice 29.1 (★)

Déterminer les matrices des applications suivantes, dans les bases canoniques :

$$\begin{array}{l}
 f_1 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - z, -x + 2y) \end{array} \right. ; \\
 f_2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 4x - y, 2y + 3z) \end{array} \right. ; \\
 f_3 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto (a + ib)z \end{array} \right. ;
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 f_4 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P - (X + 1)P' \end{array} \right. ; \\
 f_5 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{array} \right. ; \\
 f_6 : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{array} \right. \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

#### Exercice 29.2 (★)

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de la forme  $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et en déterminer une base  $\mathcal{B}$ .
2. Soit  $\varphi : f \in E \mapsto f'$ . Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ , et déterminer sa matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ . Qu'en déduit-on sur  $\varphi$  ?
4. En utilisant la matrice  $A$ , déterminer une primitive de  $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$ .

#### Exercice 29.3 (★★)

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ , et prouver qu'ils sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base adaptée à  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ , et donner la matrice de  $f$  dans cette base.
3. Écrire  $f$  comme la composée de deux endomorphismes connus.

#### Exercice 29.4 (★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on pose  $\Delta_n(P) = P(X + 1) - P(X)$ .

1. Montrer que  $\Delta_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Quelle est sa matrice dans la base canonique ?
2. Déterminer le noyau et l'image de  $\Delta_n$ .

3. On pose  $B_0 = 1$  et pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $B_k = \frac{1}{k!} \prod_{\ell=0}^{k-1} (X - \ell)$ . Déterminer  $\Delta_n(B_k)$ .

4. Montrer que  $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ , et déterminer la matrice de  $\Delta_n$  dans cette base.

**Exercice 29.5 (★★)**

Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  dont la matrice dans la base canonique est  $M$ .
  2. En déduire que  $M$  est inversible et déterminer  $M^{-1}$ .
- 

**Exercice 29.6 (★★★★ - 📁)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  qu'on complète en  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Montrer que  $F$  est stable par  $f$  si, et seulement si,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ .

2. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure si, et seulement si, il existe une suite strictement croissante  $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$  de sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$  (une telle suite est appelée un *drapeau*).
- 

**Exercice 29.7 (★★★★ - Décomposition de Fitting)**

Montrer que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est semblable à une matrice de la forme  $\left( \begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$  où  $N$  est une matrice carrée nilpotente et  $C$  est une matrice carrée inversible.

*Indication.* On pensera à la suite des noyaux et images itérés.

---

**Rang d'une matrice****Exercice 29.8 (★)**

Déterminer, avec le moins possible de calculs, le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $r \in \mathbb{N}$  et  $P, Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversibles tels que  $PAQ = J_{r,3,3}$ .

---

**Exercice 29.9 (★★)**

Déterminer, suivant les valeurs de  $a, b \in \mathbb{C}$ , le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$


---

**Exercice 29.10 (★★)**

Déterminer les triplets  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pour lesquels le système  $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$  possède des solutions.

Combien en possède-t-il alors ?

---

**Exercice 29.11 (★★)**

Soit  $n \geq 2$ . Montrer que la matrice carrée  $A = (\sin(i + j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de rang au plus 2.

---

**Exercice 29.12 (★★★ - Matrices de rang 1 -  $\hookrightarrow$ )**

1. Soient  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  non nulles. Quel est le rang de  $C \times L$  ?
  2. Montrer réciproquement que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de rang 1, il existe une matrice colonne non nulle  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et une matrice ligne non nulle  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  telles que  $M = CL$ .
  3. Montrer qu'alors  $LC = \text{tr}(M)$ , puis que  $M^2 = \text{tr}(M)M$ .
- 

**Exercice 29.13 (★★★)**

Montrer que pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , on a :  $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$ .

---

**Changement de base****Exercice 29.14 (★)**

Considérons la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ .

On considère les vecteurs  $f_1 = (1, -1, 0)$ ,  $f_2 = (1, 1, 0)$  et  $f_3 = (0, 0, 1)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  2. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  et déterminer son inverse.
  3. Soit  $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
  4. Déterminer la matrice  $T$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  5. En déduire  $T^n$  puis  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 

**Exercice 29.15 (★)**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = (A, B, C, D)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  2. Pour tout  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on pose  $\varphi(M) = AM - MA$ .
    - (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
    - (b) Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  puis dans la base  $\mathcal{B}'$ .
-

**Exercice 29.16 (★★)**

On considère  $F = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$ .

1. (a) Déterminer une base  $(e_1, e_2)$  de  $F$  et une base  $(e_3)$  de  $G$ .  
 (b) Montrer que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . En déduire que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .
  2. On considère  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  
 (a) Déterminer la matrice de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
 (b) En déduire la matrice de  $p$  dans la base canonique.  
 (c) Donner  $p(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
  3. Soient  $q$  la projection sur  $G$  par rapport à  $F$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $G$  dans la direction de  $F$ . Déterminer  $q(x, y, z)$  et  $s(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 

**Similitude et équivalence****Exercice 29.17 (★★)**

Dans chaque cas, déterminer si les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables :

$$\begin{array}{l}
 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
 3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$


---

**Exercice 29.18 (★★)**

1. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{rg}(A - \lambda I_n) = \text{rg}(B - \lambda I_n)$ .

2. Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables ?
- 

**Exercice 29.19 (★★★)**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  est semblable à  $T$ , et déterminer  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = P^{-1}TP$ .
  2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $T^n$ , puis en déduire  $A^n$ .
- 

**Exercice 29.20 (★★★)**

1. Si  $s$  est une symétrie d'un espace de dimension finie, déterminer  $\text{tr}(s)$  en fonction de  $\dim(\text{Ker}(s - \text{id}_E))$  et  $\dim(\text{Ker}(s + \text{id}_E))$ .
  2. En considérant  $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^\top$ , retrouver les dimensions de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .
-