Calcul algébrique et trigonométrie

Calcul de sommes et de produits

Exercice 3.1 (★)

Soit n un entier naturel. Calculer :

$$(1) \sum_{k=0}^n k(k+1) ;$$

$$(4) \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^{2k-1}} ;$$

$$(7) \prod_{k=0}^n 2 \exp(2^k) ;$$

$$(2) \sum_{k=0}^n (2k+1) ;$$

$$(5) \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) ;$$

$$(8) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) ;$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3) ;$$

$$(6) \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} ;$$

$$(9) \prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}.$$

Exercice 3.2 (★★ - 📎)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de nombres factoriels les produits $\prod_{k=1}^n (2k)$ et $\prod_{k=0}^n (2k+1)$.

2. Même question pour le produit $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right)$.

Exercice 3.3 (★★★)

À l'aide d'une sommation par paquet, calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3 ;$$

$$(2) \sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

1. Effectuons une sommation par paquets, en notant que

$$\llbracket 1, 2n \rrbracket = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \dots \cup \{2n-1, 2n\} = \bigcup_{k=1}^n \{2k-1, 2k\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3 &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{2k-1} (2k-1)^3 + (-1)^{2k} (2k)^3 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left((2k)^3 - (2k-1)^3 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (12k^2 - 6k + 1) \\ &= 12 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + n \\ &= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n \\ &= n^2(4n+3) \end{aligned}$$

2. On remarque que :

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p \Leftrightarrow p \leq \sqrt{k} < p+1 \Leftrightarrow p^2 \leq k < (p+1)^2 \Leftrightarrow k \in \llbracket p^2, (p+1)^2 - 1 \rrbracket.$$

Posons $I_p = \llbracket p^2, (p+1)^2 - 1 \rrbracket$ de sorte que $\llbracket 1, n^2 - 1 \rrbracket = \bigcup_{p=1}^{n-1} I_p$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k \in I_p} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \right) = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k \in I_p} p \right) \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} p(2p+1) \quad (\text{car Card}(I_p) = 2p+1) = 2 \sum_{p=1}^{n-1} p^2 + \sum_{p=1}^{n-1} p \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(4n+1)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 3.4 (★★★★ - 📖)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 3.5 (★★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\prod_{i=1}^n f_i$ est dérivable, et que
$$\left(\prod_{i=1}^n f_i \right)' = \sum_{i=1}^n \left(f_i' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n f_k \right).$$

Procédons par récurrence sur n en prouvant $\mathcal{P}(n)$: « quelles que soient les fonctions $f_1, \dots, f_n$

dérivables sur $\mathbb{R}$, $\prod_{i=1}^n f_i$ est dérivable avec
$$\left(\prod_{i=1}^n f_i \right)' = \sum_{i=1}^n f_i' \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n f_k \right) \text{ »}.$$

I Pour $n = 1$, c'est évident puisque $f_1' \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^1 f_k \right) = f_1' \times 1 = f_1'$.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors par hypothèse de récurrence, $f_1 \times \dots \times f_n$ est dérivable, si bien que par produit, $f_1 \times \dots \times f_{n+1} = (f_1 \times \dots \times f_n) f_{n+1}$ est dérivable. Et alors, par dérivation d'un produit, il vient

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right)' &= \left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' f_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^n f_i\right) f'_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(f'_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n f_k \right) f_{n+1} + f'_{n+1} \prod_{k=1}^n f_k \\
&= \sum_{i=1}^n \left(f'_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} f_k \right) + f'_{n+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n+1}}^{n+1} f_k \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} f'_i \left(\prod_{\substack{k < 1 \\ k \neq i}}^{n+1} f_k \right)
\end{aligned}$$

Et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 3.6 (★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n + 1 - k$, déterminer une autre expression de S_n .
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme suggéré, calculons :

$$\begin{aligned}
A_n + B_n &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
A_n - B_n &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $A_n = B_n$, et $2A_n = 2B_n = 2^n$, soit $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

Exercice 3.7 (★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n .

Exercice 3.8 (★★)

1. Soit p entier naturel fixé. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant un télescopage.
3. À l'aide de cette formule, retrouver la valeur des sommes classiques $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 3.9 (★★)

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}; \quad \left| \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}; \quad \left| \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}; \quad \left| \quad S_4 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3.10 (★★★)

1. Soient n, p et q trois entiers naturels vérifiant $n \leq p + q$. En développant de deux manières différentes $(1+x)^{p+q}$, établir :

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

1. D'une part,

$$(1+x)^p \times (1+x)^q = (1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k.$$

Le coefficient de x^n dans $(1+x)^p \times (1+x)^q$ est donc $\binom{p+q}{n}$.

D'autre part,

$$(1+x)^p \times (1+x)^q = \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} x^k \right)$$

et le coefficient de x^n dans le développement de ce produit est la somme des produits $\binom{p}{i} \binom{q}{j}$ pour les indices i et j vérifiant $i+j=n$.

Par identification,

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{p}{i} \binom{q}{j} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$

2. Le coefficient de x^n dans $(1+x)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. On peut retrouver ce coefficient en considérant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \times (1+x)^n$ ce qui donne l'identité :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{coefficient de } x^k \text{ dans } (1+x)^n} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{coefficient de } x^{n-k} \text{ dans } (1+x)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Le coefficient de x^n dans $(1-x)^n \times (1+x)^n$ est :

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{(-1)^k \binom{n}{k}}_{\text{coefficient de } x^k \text{ dans } (1-x)^n} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{coefficient de } x^{n-k} \text{ dans } (1+x)^n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$

Or ce coefficient est aussi celui de x^n dans $(1-x^2)^n$ et donc :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}^2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exercice 3.11 (★★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La formule du binôme de Newton permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \sqrt{3}^{2k} 2^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \sqrt{3}^{2k+1} 2^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k} + \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 3^k 2^{n-2k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 3^k 2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des entiers tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.

En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on a aussi $(2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2 - 3b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{3})(a_n - b_n\sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3})^n = (4 - 3)^n = 1$$

2. On note que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = (a_n + b_n\sqrt{3}) + (a_n - b_n\sqrt{3}) = 2a_n$. Mais $0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1$, d'où :

$$(2 + \sqrt{3})^n < (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2a_n < (2 + \sqrt{3})^n + 1$$

ou encore

$$2a_n - 1 < (2 + \sqrt{3})^n < 2a_n.$$

On en déduit que $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor = 2a_n - 1$, et donc que $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

Exercice 3.12 (★★★★★) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Notons que le premier et le dernier terme de la somme sont égaux à 1, et donc que :

$$u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq 2$$

D'autre part, pour $k = 1$ et $k = n - 1$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{n}$.

Pour les autres coefficients, essayons de nous faire une petite intuition de ce qu'il se passe. Les coefficients que nous considérons sont sur une même ligne du triangle de Pascal. Or, vous avez probablement déjà constaté que sur une ligne du triangle de Pascal, les coefficients croissent jusqu'au milieu de la ligne, puis décroissent. En particulier, si $k \in \llbracket 2, n - 2 \rrbracket$, on doit avoir $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

Admettons provisoirement ceci. On aura alors, pour $k \in \llbracket 2, n - 2 \rrbracket$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}$.

Et donc :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} \leq (n-3) \frac{2}{n(n-1)}$$

Et par conséquent, il vient

$$2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + 2 \frac{(n-3)}{n(n-1)}$$

Mais $\frac{2(n-3)}{n(n-1)} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{n - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Reste à présent à prouver ce que nous n'avons que « constaté » sur le triangle de Pascal. Soit donc $k \in \llbracket 2, n - 2 \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)(n-3) \cdots (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 3} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \frac{n-2}{k} \frac{n-3}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{3}. \end{aligned}$$

Or, on a $k \leq n - 2$, de sorte que $\frac{n-2}{k} \geq 1$. Puis $\frac{n-3}{k-1} \geq 1, \dots, \frac{n-k+1}{3} \geq 1$.

Et donc on a bien, comme annoncé, $\binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 3.13 (★★★★★)

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{n+1}{i} \right]$.

| Il s'agit d'utiliser l'identité de Pascal : pour $i \geq 1$, $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{n+1}{i} \right] &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \binom{n+1}{i} \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{k} \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{k} \right] \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + 2 \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 + 2 \sum_{0 \leq i < k \leq n} \binom{n}{k} \binom{n}{i} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}.
\end{aligned}$$

Rappel.

La formule clé que nous avons utilisée à l'avant dernière étape est :

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Sommes doubles

Exercice 3.14 (★★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer successivement :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j), \quad \sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j), \quad \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq i, j \leq n} |i-j|.$$

Pour le calcul de la somme double $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j)$, par la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j) &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} i + \sum_{0 \leq i, j \leq n} j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n j \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=0}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} = n(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Pour le calcul de $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \min(i, j) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \min(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \min(i, j) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n - (i+1) + 1) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{i^2 + i}{2} + in - i^2 \right) = \left(\frac{1}{2} + n \right) \sum_{i=0}^n i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i^2 \\
 &= \frac{2n+1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n(n+1)(2n+1) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Procédons de deux manières au calcul de $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

- **Méthode 1** : on procède à un calcul analogue du précédent.

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \max(i, j) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \max(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \right) = \sum_{i=0}^n \left(i(i+1) + \frac{(i+1+n)(n - (i+1) + 1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(2i^2 + 2i + (i + (n+1))(n - i) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(2i^2 + 2i + ni - i^2 + n(n+1) - (n+1)i \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(i^2 + i + n(n+1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} n(n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)}{12} ((2n+1) + 3 + 6(n+1)) \\
 &= \frac{n(n+1)}{12} (8n+10) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.
 \end{aligned}$$

- **Méthode 2** : en remarquant que pour tout (i, j) :

$$(i + j) = \min(i, j) + \max(i, j).$$

On obtient que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} ((i + j) - \min(i, j)) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (i + j) - \sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \\
 &= n(n+1)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{6} (6(n+1) - (2n+1)) \\
 &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}
 \end{aligned}$$

Exercice 3.15 (★★)

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$.

1. Calculer de deux manières différentes la somme double S_n .

En déduire que :
$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

2. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

Exercice 3.16 (★★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

(1) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$;	(4) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$;	(6) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n (1-2^i)2^{ij}$;
(2) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j} \quad (x \in \mathbb{R})$;	(5) $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j+1}$;	(7) $\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{k\ell}{n(n-1)}$.
(3) $\sum_{0 \leq i < j \leq n} ij$;		

Exercice 3.17 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p+q) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) + 2 \sum_{k=1}^n k$.

En déduire la valeur de $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$.

Il s'agit tout simplement d'une relation de Chasles, en notant qu'on peut couper en trois l'ensemble $I_n = \llbracket 1, n \rrbracket^2$ en notant que

$$I_n = \{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid p < q\} \cup \{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid p > q\} \cup \{(k, k), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

Ces trois ensembles sont clairement deux à deux disjoints. Et alors

$$\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p+q) = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q) + \sum_{k=1}^n (k+k) + \sum_{1 \leq q < p \leq n} (p+q)$$

La somme du milieu est $2 \sum_{k=1}^n k$.

Et la première et la dernière sont toutes deux égales à $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$, si bien qu'on a bien l'égalité annoncée :

$$\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p+q) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) + 2 \sum_{k=1}^n k$$

Il est facile de constater que

$$\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p+q) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (p+q) = \sum_{p=1}^n \left(np + \sum_{q=1}^n q \right) = \sum_{p=1}^n np + n \sum_{q=1}^n q = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

Et donc

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq n} (p + q) - \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

Calcul trigonométrique

Exercice 3.18 (★★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

(1) $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$;	(3) $\cos^2(x) \geq \frac{1}{4}$;	(5) $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$;
(2) $ \tan(x) \leq 1$;	(4) $2 \sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$;	(6) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) > 1$.

Exercice 3.19 (★)

1. En notant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3.20 (★★)

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 3.21 (★★★)

Résoudre l'équation suivante dans $[0, \pi]$: $\cos(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Puisque $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} > 0$, une solution de cette équation est nécessairement dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur lequel le cosinus est positif. On peut donc se restreindre à la résolution de cette équation sur cet intervalle. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} &\stackrel{\substack{\Leftrightarrow \\ \cos(x) \geq 0}}{\Leftrightarrow} \cos(x)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\stackrel{\substack{\Leftrightarrow \\ 2x \in [0, \pi]}}{\Leftrightarrow} 2x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation sur $[0, \pi]$ est donc $\left\{ \frac{\pi}{12} \right\}$.

Exercice 3.22 (★★★)

Résoudre les équations suivantes :

$$(1) \tan(2x) = 3 \tan(x) ; \quad \left| \quad (2) \cos(2x) - \cos(3x) = 0 ; \quad \left| \quad (3) 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

1. Notons que l'équation n'a de sens que si x et $2x$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π , c'est-à-dire si et seulement si $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\begin{aligned} \tan(2x) = 3 \tan(x) &\Leftrightarrow \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = 3 \tan(x) \\ &\Leftrightarrow 2 \tan(x) = 3 \tan(x)(1 - \tan^2(x)) \\ &\Leftrightarrow \tan(x) (3 \tan^2(x) - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan(x) = 0 \text{ ou } \tan(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0[\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6}[\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}[\pi]. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\cos(2x) - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x) \Leftrightarrow 2x \equiv 3x[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -3x[2\pi].$$

Soit encore si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$2x = 3x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -3x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -2k\pi \text{ ou } x = k\frac{2\pi}{5}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Avec les formules de trigonométrie,

$$\cos(x) + \cos(3x) = 2 \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2 \cos(x) \cos(x).$$

D'autre part, $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2(x)$, donc

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(x)(\cos(2x) + \cos(x)) = 0.$$

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou

$$\cos(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x).$$

Soit encore si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $2x \equiv \pi - x[2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi[2\pi]$.

Mais $2x \equiv \pi - x[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[\frac{2\pi}{3}]$ et $2x \equiv x - \pi[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\pi[2\pi]$.

Au final, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Puisque $(2k+1)\pi = \frac{\pi}{3} + 3k\frac{2\pi}{3}$, on peut donc écrire plus simplement que l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 3.23 (★★★)

Résoudre l'inéquation $\sqrt{1 + 2 \cos(x)} \leq \sin x$.

Les fonctions sin et cos étant 2π -périodiques, il suffit de chercher les solutions dans $] -\pi, \pi]$, les autres s'obtiendront par translation de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nous supposons donc dans la suite que $x \in] -\pi, \pi]$.

Commençons par noter que le membre de gauche n'a de sens que si

$$1 + 2 \cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Puisqu'une racine est toujours positive, pour $x \in] -\frac{2\pi}{3}, 0[$, $\sin(x) < 0$, et donc x n'est pas solution de l'équation.

Enfin, pour $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$,

$$\sqrt{1 + 2 \cos(x)} \leq \sin(x) \Leftrightarrow 1 + 2 \cos(x) \leq \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) + 2 \cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2 + \cos(x)) \leq 0.$$

Puisque $2 + \cos(x)$ est positif, cette dernière inégalité n'est vérifiée que pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation de départ dans $] -\pi, \pi]$ est $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$.

Et l'ensemble des solutions de l'équation est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$.

Exercice 3.24 (★★)

Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x) \sin(x) \geq 1$.

On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en $\tan x$.

Notons que par 2π -périodicité de sin et cos, il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi, \pi]$.

Mieux : $\cos^2$ et $x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ sont π -périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0, \pi]$.

On suppose donc dans la suite que $x \in [0, \pi]$.

Constatons que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas solution, et que pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire lorsque $\tan x$ existe), on a $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ et

$$\cos(x) \sin(x) = \cos^2(x) \tan(x) = \frac{\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \geq 1$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1 - X}{1 + X^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1 - X}{1 + X^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2 - X}{1 + X^2} \geq 0 \Leftrightarrow X(X + 1) \leq 0.$$

Ce qui est le cas si, et seulement si, $X \in [-1, 0]$. Soit encore si, et seulement si, $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi \right]$.

Exercice 3.25 (★★)

Montrer que pour $n \geq 2$, on a $2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (où il y a $n - 1$ racines carrées).

Exercice 3.26 (★★★)

1. Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2(\alpha) \tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2 \tan \alpha$.

2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right) \tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$ où $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Donner la limite de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Les expressions $\tan(\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ ont un sens si, et seulement si, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $2\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Pour un tel α , $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ et donc :

$$\begin{aligned} \tan(2\alpha) - 2 \tan(\alpha) &= \frac{2 \tan(\alpha) - 2 \tan(\alpha) (1 - \tan^2(\alpha))}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{2 \tan^3(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \\ &= \tan^2(\alpha) \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha) \tan(2\alpha). \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule de la question précédente (valable car $\frac{x}{2^k} \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ pour tout $k \geq 1$) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right) \tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \left(\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - 2 \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^n 2^k \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \tan(x) - 2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right). \end{aligned}$$

3. Il s'agit de déterminer la limite de $2^n \tan \frac{x}{2^n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Rappel : limites usuelles (?).

Rappelons les limites suivantes, à retenir :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan(u)}{u} = 1.$$

La première correspond en effet au taux d'accroissement du sinus en 0 :

$$\frac{\sin(u)}{u} = \frac{\sin(u) - \sin(0)}{u - 0} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

La seconde peut aussi s'obtenir en reconnaissant le taux d'accroissement du sinus en 0, ou à l'aide de la première comme suit :

$$\frac{\tan(u)}{u} = \frac{\sin(u)}{u} \times \frac{1}{\cos(u)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1.$$

Supposons $x \neq 0$. Puisque $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, par composition des limites :

$$2^n \tan \frac{x}{2^n} = x \frac{\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \times 1 = x.$$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \tan(x) - x$. Et ce résultat reste valable pour $x = 0$ puisqu'alors $S_n = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 = \tan(0) - 0$.

Exercice 3.27 (★★★)

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

2. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t}$.

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$.