TD 3

Calcul algébrique et trigonométrique

Calcul de sommes et de produits

Exercice 3.1 (★)

Soit n un entier naturel. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)$;

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$;

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

(6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. ;

(7) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2\exp(2^k)$;

(8) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;

(9) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$.

Exercice 3.2 (★★)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de nombres factoriels les produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.
2. Même question pour le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$.

Exercice 3.3 (★★★)

À l'aide d'une sommation par paquet, calculer les sommes suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^3$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$.

Exercice 3.4 (★★★)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

Exercice 3.5 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable, et que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} f_k\right)$.

Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 3.6 (★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 3.7 (★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n.

Exercice 3.8 (★★)

1. Soit p entier naturel fixé. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant un télescopage.
3. À l'aide de cette formule, retrouver la valeur des sommes classiques $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 3.9 (★★)

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ ; \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \ ; \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} \ ; \quad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 3.10 (★★★)

1. Soient n, p et q trois entiers naturels vérifiant $n \leq p+q$. En développant de deux manières différentes $(1+x)^{p+q}$, établir :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3.11 (★★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

Exercice 3.12 (★★★★)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3.13 (★★★★★)

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i}\right]$.

Sommes doubles

Exercice 3.14 (★★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer successivement :

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j),\quad \sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j),\quad \sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)\quad \text{et}\quad \sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j|\cdot$$

Exercice 3.15 (★★)

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}2^j$.

1. Calculer de deux manières différentes la somme double S_n.

   En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=(n-1)2^n+1$.

2. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1}k2^{k-1}$.

Exercice 3.16 (★★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2$;

(2) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}x^{i+j}\quad (x\in\mathbb{R})$;

(3) $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n}ij$;

(4) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}$;

(5) $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j+1}$;

(6) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij}$;

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)}$.

Exercice 3.17 (★★★)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier que $\displaystyle\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=2\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)+2\sum_{k=1}^{n}k$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)$.

Calcul trigonométrique

Exercice 3.18 (★★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(1) $\cos(x)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(2) $|\tan(x)|\leq 1$;

(3) $\cos^2(x)\geq\frac{1}{4}$;

(4) $2\sin^2(x)+\sin^2(2x)=2$;

(5) $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$;

(6) $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)>1$.

Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.

Exercice 3.19 (★)

1. En notant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3.20 (★★)

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 3.21 (★★★)
Résoudre l'équation suivante dans $[0,\pi]$: $\quad \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 3.22 (★★★)
Résoudre les équations suivantes :

(1) $\tan(2x) = 3\tan(x)$;

(2) $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$;

(3) $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 3.23 (★★★)
Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+2\cos(x)} \leq \sin(x)$.

Exercice 3.24 (★★)
Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) \geq 1$.
On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en $\tan(x)$.

Exercice 3.25 (★★)
Montrer que pour $n \geq 2$, on a $2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (où il y a $n-1$ racines carrées).

Exercice 3.26 (★★★)

1. Montrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2(\alpha)\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2\tan(\alpha)$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Donner la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3.27 (★★★)

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t}$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$.
