TD 30

Variables aléatoires finies

Loi d'une variable aléatoire

Exercice 30.1 (★)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 30.2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 30.3 (★★)

1. Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs. On note X le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de X.

2. Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de Y.

Exercice 30.4 (★★★ - Urne de Polya)

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire une boule, on la remet dans l'urne, et on ajoute une autre boule de la même couleur. Ainsi, à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ répétition de l'expérience, l'urne contient $k + 2$ boules.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $k^{\text{ème}}$ tirage.

Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, k+1]\!]$.

Exercice 30.5 (★★★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors T la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Proposer un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience et déterminer $T(\Omega)$.

2. Calculer $P(T = 2)$.

3. Soit $k \in T(\Omega)$. Exprimer $P_{[T>k-1]}(T > k)$.

4. En déduire $P(T = k)$ pour tout $k \in T(\Omega)$.

Moments d'une variable aléatoire

Exercice 30.6 (★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. On effectue alors un second tirage et on note Y le numéro de la boule obtenue.

Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 30.7 (★★ - Loi triangulaire)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 2n-1]\!]$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X = i) = \lambda i, \quad \forall i \in [\![n+1, 2n-1]\!],\ P(X = i) = \lambda(2n - i)$$

où λ est un réel fixé.

1. À quelle condition sur λ définit-on ainsi la loi d'une variable aléatoire ?
2. Prouver alors que X et $2n - X$ ont même loi. En déduire $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$.

Exercice 30.8 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Calculer $E(Y)$ dans les cas suivants :

(i) $Y = \dfrac{1}{1 + X}$;

(ii) $Y = \dfrac{\alpha^X}{2^n}$ où $\alpha > 0$.

Exercice 30.9 (★★)

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n le nombre de jours entre 1 et n où l'action monte, et S_n la valeur de l'action le jour n.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Exprimer S_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 30.10 (★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules, on note X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que les variables aléatoires Y et $n + 1 - X$ ont même loi. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 30.11 (★★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le jeton i est dans la poignée tirée » et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement A_i ? En déduire la loi de Y_i.
2. Exprimer X en fonction des Y_i, et en déduire $E(X)$.

Exercice 30.12 (★★)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$.
2. **Application.** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement et sans remise. On note alors X_i la variable aléatoire égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, et on note X la variable aléatoire égale au plus grand entier k tel que $X_1 < X_2 < \cdots < X_k$.

   Déterminer les valeurs de $P(X \geq k)$. En déduire $E(X)$.

Exercice 30.13 (★★ - Fonction génératrice - ✍)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$. On appelle *fonction génératrice de X* la fonction polynômiale G_X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ ($p \in]0,1[$) puis $X \sim \mathscr{U}([\![0,n]\!])$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.
4. Montrer que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

Exercice 30.14 (★★★)

On effectue une succession de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue de n lancers.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2 et de X_3.
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1).$$

4. On note G_n la fonction génératrice de la variable X_n.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(t) = \frac{(1+t)}{2}G_n(t)$.
   (b) En déduire une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de s.
   (c) Calculer alors l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 30.15 (★★★ - Banque CCINP)

Un téléconseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0,1[$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.
2. Le téléconseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{[X=i]}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (c) Déterminer alors l'espérance et la variance de Z, ainsi que $E(Y)$.

Exercice 30.16 (★★★)

Un téléphone contient $n \geq 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1. Déterminer $X_k(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X_k = 1)$ et $P(X_k = k)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, prouver que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1).$$
4. Donner alors une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$, puis l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.

Exercice 30.17 (★★★★ - Une loi finie est caractérisée par ses moments)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Montrer que X et Y ont même loi si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $E\left(X^k\right) = E\left(Y^k\right)$.

Exercice 30.18 (★★★★)

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = \alpha$ et $E(X^2) = E(X^4) = 1$.

Montrer que $\alpha \in [-1,1]$, puis déterminer la loi de X.
