TD 34

Intégration

Fonctions uniformément continues, en escalier, continues par morceaux

Exercice 34.1 (★★)

1. Soit f une fonction uniformément continue sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de $\mathscr{D}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

2. La fonction ln est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$? Sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$?

Exercice 34.2 (★★★)

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34.3 (★★★)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $|f(x)| \leq ax + b$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 34.4 (★★★)

Montrer que $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) + \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ (où $+$ désigne la somme de sev).

Propriétés de l'intégrale, calculs

Exercice 34.5 (★★)

Calculer :

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$; | (ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$; | (iii) (★) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos(nx^2)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 34.6 (★★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 34.7 (★★)

Donner un équivalent, lorsque $x \to +\infty$, des intégrales $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x |\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 34.8 (★★ - Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire - ✍)

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est un signe constant sur } [a,b].$$

Exercice 34.9 (★★)

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 34.10 (★★★ - Première formule de la moyenne)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec g positive.

   Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Soit f continue au voisinage de 0. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 34.11 (★★★)

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Montrer que : $\displaystyle\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 34.12 (★★★ - Lemme de Riemann-Lebesgue - ✍)

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On souhaite prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Commencer par traiter le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
2. Traiter le cas d'une fonction en escaliers.
3. Traiter le cas général à l'aide du théorème d'approximation.

Exercice 34.13 (★★★★)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

1. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Prouver que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

2. On considère à présent $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$.

   Montrer par l'absurde que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

   On pourra notamment considérer des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ *où* Q *est un polynôme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *bien choisi.*

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 34.14 (★★)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f et g sont égales à la fonction nulle.

Exercice 34.15 (★★)

Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leq k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 34.16 (★★★)

Soit $f \in \mathscr{C}_m([0,+\infty[)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit $F : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 34.17 (★★★)

Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ | (ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$ | (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ | (iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 34.18 (★★★)

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

On étudiera la parité, les variations, la limite en $\pm\infty$.

Applications des formules de Taylor

Exercice 34.19 (★★)

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Exercice 34.20 (★★ - Développement en série entière du sinus)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 34.21 (★★★)

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornée. On pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
2. En déduire que :
$$\|f'\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 34.22 (★★★)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq A^n n!$.

Prouver que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$, puis qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$.

Sommes de Riemann

Exercice 34.23 (★★)

Déterminer les limites des suites de terme général :

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$;

(ii) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$;

(iii) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;

(iv) $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 34.24 (★★ - Oral Mines Ponts)

Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 34.25 (★★★)

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \cdots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$.

Exercice 34.26 (★★★ - Majoration de l'erreur dans la méthode du point milieu)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On pose $c = \frac{a+b}{2}$ et $\varphi : x \mapsto f(c) + (x-c)f'(c)$. On note F une primitive de $f - \varphi$ sur $[a,b]$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $F(x) = F(c) + \displaystyle\int_c^x \frac{(x-t)^2}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver alors que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24}\|f''\|_\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On considère alors la somme suivante :
$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$
   (a) Interpréter géométriquement le réel $S_n(f)$.
   (b) Déterminer une majoration de l'erreur commise en approximant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par $S_n(f)$.
