

## Espaces préhilbertiens

## Produit scalaire et norme euclidienne

## Exercice 35.1 (★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2) dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## Exercice 35.2 (★★)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$ . Étudier le cas d'égalité.

## Exercice 35.3 (★★)

1. Montrer que  $\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

2. Établir que pour tout  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  :  $\left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt\right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)$ .

Exercice 35.4 (★★ - Produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  - )

On considère l'espace  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel défini par  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ .

1. Déterminer la norme du vecteur  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Établir que pour tout  $A \in E$  :  $\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$ .

3. Montrer que les sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux.

4. Montrer que la famille  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  des matrices élémentaires est une base orthonormée de  $E$ .

## Exercice 35.5 (★★★ - Théorème de représentation de Riesz)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace vectoriel euclidien.

1. Montrer que pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$ , il existe un unique vecteur  $v \in E$  tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle v, x \rangle.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique  $A \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 P(t)A(t) dt$ .

## Bases orthonormées

## Exercice 35.6 (★)

On se place dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire canonique. Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -z\}$ . On note  $e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$  et  $e_3 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$ .

1. Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée de  $F$ .

2. Soit  $u = (2, 3, -3, 7)$ . Montrer que  $u \in F$  et déterminer  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ .

**Exercice 35.7 (★★ - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel  $F$  de  $E$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

1.  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \text{Vect}((1, 0, -2), (1, 1, 1))$ , produit scalaire canonique ;
  2.  $E = F = \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  ;
  3.  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ ,  $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^\top N)$  ;
  4.  $E = \mathbb{R}^4$ ,  $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$ , produit scalaire canonique ;
  5.  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $F = \text{Vect}(X^2 + 1, X^3 + 1)$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .
- 

**Polynômes orthogonaux****Exercice 35.8 (★★)**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  2. Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $P_i = (X - a)^i$ .
    - (a) Calculer  $P_i^{(k)}(a)$  pour tout  $i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
    - (b) Montrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une famille orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
    - (c) Calculer  $\|P_i\|$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . En déduire une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans cette base  $\mathcal{B}$ . Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.
- 

**Exercice 35.9 (★★★)**

On considère l'espace  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , et on pose :  $\forall (P, Q) \in E^2$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

Pour tout  $0 \leq p \leq n$ , on note  $L_p(X) = \frac{d^p}{dX^p}(X^p(X-1)^p)$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
  2. Montrer que  $L_p$  est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.
  3. Calculer par intégration par parties  $\langle L_p, L_q \rangle$  pour  $p \neq q$ . En déduire que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  4. Déterminer enfin la norme euclidienne de  $L_p$ .
- 

**Orthogonal d'une partie****Exercice 35.10 (★)**

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de  $F^\perp$  dans les deux cas suivants :

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0, 2), (0, 1, 3, 2)).$$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0 \text{ et } x - y - t = 0\}.$$


---

**Exercice 35.11 (★★ - Propriétés de l'orthogonal - 📁)**

Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

1. Montrer que  $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$  et  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ .
2. En déduire que si  $E$  est de dimension finie et si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ , alors  $E = F^\perp \oplus G^\perp$ .

**Exercice 35.12 (★★ - Orthogonal d'un sous-espace de dimension infinie)**

On munit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On considère l'espace  $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ .

1. Soit  $f \in H^\perp$ . On pose  $g : t \mapsto tf(t)$ . Que peut-on dire de  $f$  et  $g$  ? En déduire que  $f = 0_E$ .
2. En déduire  $H^\perp$  et  $(H^\perp)^\perp$ . A-t-on  $H \oplus H^\perp = E$  ?

**Projection orthogonale****Exercice 35.13 (★)**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace  $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ . Déterminer le projeté de  $a = (-2, 1, 1)$  sur  $F$ .

**Exercice 35.14 (★★ - Calcul de projetés orthogonaux)**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Déterminer le projeté orthogonal de  $P_1 = X^2 + X + 1$  sur  $F_1 = \mathbb{R}_1[X]$ .
2. Déterminer le projeté orthogonal de  $P_2 = X^3 + X^2 + X + 1$  sur  $F_2 = \text{Vect}(X^3 + X, X^2, 1)$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal de  $P_3 = X^2 - 1$  sur  $F_3 = \text{Vect}(1 + X, X^2 - X)$ .

**Exercice 35.15 (★★★)**

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire usuel, on considère  $F$  le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}.$$

On cherche à déterminer la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale  $p$  sur  $F$ .

**1. Méthode 1.**

Déterminer une base orthonormale de  $F$ . En déduire  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$ .

**2. Méthode 2.**

(a) Déterminer une base orthonormale de  $F^\perp$ .

(b) On note  $q$  la projection orthogonale sur  $F^\perp$ . Déterminer  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ , puis  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$ .

**Exercice 35.16 (★★)**

Soit  $E$  un espace euclidien de base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ , soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1, et soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$ . Montrer que :  $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$ .

## Distance à un sous-espace

### Exercice 35.17 (★★)

Si  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$  et  $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$  sont deux polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 a_i b_i$ .

On pose  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_2[X]$  et en déterminer une base.
2. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .
3. Déterminer la distance entre le polynôme  $X^2$  et  $F$ .

### Exercice 35.18 (★★★)

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire usuel. Soit  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer sa dimension.
2. Soit  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer la distance entre la matrice  $J$  et le sous-espace  $F$ .

### Exercice 35.19 (★★★★ - Déterminant de Gram - 📖)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tous  $v_1, \dots, v_n \in E$ , on définit le déterminant de Gram de ces vecteurs par :

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  et  $v_1, \dots, v_n, a \in E$  :

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_n, a) = \text{Gram}(v_1, \dots, v_n, a + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n).$$

2. Soient  $v_1, \dots, v_n \in E$ . Montrer que  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre si, et seulement si,  $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ .
3. Soient  $F$  un sous-espace de  $E$  de dimension finie,  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ , et  $a \in E$ . Montrer que :

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_n, a) = \text{Gram}(v_1, \dots, v_n) \times d(a, F)^2.$$

### Exercice 35.20 (★★★★ - Oral Mines Ponts PSI)

L'espace  $\mathbb{R}_n[X]$  est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite  $p_0, \dots, p_n$  telle que :

$$\frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \sum_{i=0}^n \frac{p_i}{X+i+1}.$$

2. Montrer que  $P = p_0 + p_1X + \dots + p_nX^n$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
3. Calculer  $\langle P, X^n \rangle$ . Montrer que  $\langle P, P \rangle = p_n \langle P, X^n \rangle$ , puis déterminer  $\|P\|$ .
4. En déduire la distance  $\delta_n$  de  $X^n$  à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .