

## Familles sommables

Dans ce TD, si  $\alpha > 1$ , on note  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ . On pourra admettre que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  et  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ .

### Étude de sommabilité est calcul de sommes

#### Exercice 36.1 (★)

1. Soit  $q \in [0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $u_n = q^{|n|}$ .

Montrer que la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable, et que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}$ .

2. Soit  $r \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer la sommabilité et calculer la somme de  $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ .

---

#### Exercice 36.2 (★★)

La famille  $(x)_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  est-elle sommable ? Même question pour  $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$ .

---

#### Exercice 36.3 (★★)

Si  $q \in \mathbb{Q}$ , on note  $d_q$  le dénominateur de la forme irréductible de  $q$ .

Étudier la sommabilité de la famille  $(\frac{1}{d_q^3})_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ .

---

#### Exercice 36.4 (★★)

Soit  $I = (\mathbb{N}^*)^2$ . Pour  $(i, j) \in I$ , on pose  $u_{i,j} = \frac{1}{\max(i, j)^3}$ .

À l'aide du théorème de sommation par paquets, prouver que  $\sum_{(i,j) \in I} u_{i,j} = 2\zeta(2) - \zeta(3)$ .

---

#### Exercice 36.5 (★★)

Calculer les deux sommes  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1)$  et  $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p}}$ .

---

#### Exercice 36.6 (★★)

Déterminer les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $(\frac{1}{(p+q)^\alpha})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  est sommable.

---

#### Exercice 36.7 (★★)

Étudier la sommabilité de la famille  $(\frac{1}{ab(a+b)})_{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ .

---

## Interversion de sommes

### Exercice 36.8 (★★)

Après avoir justifié son existence, calculer  $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$  en fonction de  $\zeta(3)$ .

---

### Exercice 36.9 (★★)

Pour  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on pose  $u_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = p \\ \frac{1}{n^2 - p^2} & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$ .
  2. Après avoir justifié leur existence, vérifier que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \neq \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ .
  3. Quelle conclusion en tirez-vous ?
- 

## Divers

### Exercice 36.10 (★★)

Exercice 34.11 Soit  $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une permutation de  $\mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{\sigma(n)^2}$ , et le cas échéant, calculer sa somme.
  2. Même question pour la série de terme général  $\frac{1}{\sigma(n)}$ .
- 

### Exercice 36.11 (★★)

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$ , où  $d(n)$  est le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .
  2. De même, écrire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1 - z^n}$  sous la forme  $\sum_{n=1}^{+\infty} s(n)z^n$ , où  $s(n)$  est une suite à préciser dont on donnera une interprétation arithmétique.
- 

### Exercice 36.12 (★★★ - Oral X)

Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < 1$ , les identités

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 - x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^{2n}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1 - x}$$

On veillera à bien justifier les convergences de toutes les séries en jeu.

---

### Exercice 36.13 (★)

Étudier l'existence et le cas échéant, calculer la somme  $\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$ .

---

## Produit de Cauchy

### Exercice 36.14 (★★)

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Déterminer une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

---

### Exercice 36.15 (★★ - Formule du binôme négatif)

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ , et soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} z^n$$

---