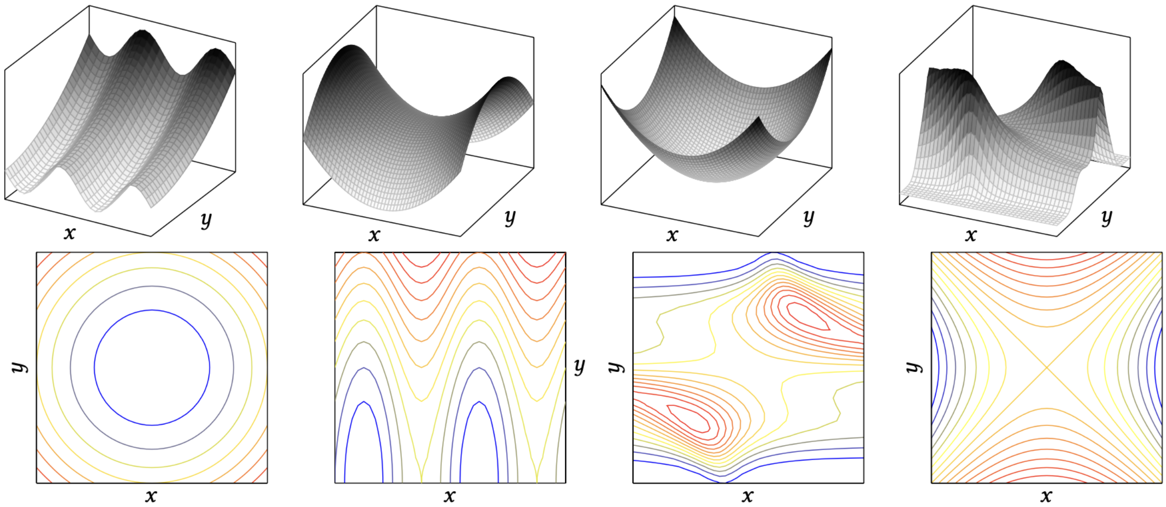
TD 37

Fonctions de deux variables

Graphe, lignes de niveau

Exercice 37.1 (★)

Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau.



> En numérotant de gauche à droite par 1, 2, 3, 4 la première ligne et par A, B, C, D la deuxième, on associe 1 avec B, 2 avec D, 3 avec A et 4 avec C.

Continuité, dérivées partielles

Exercice 37.2 (★)

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

$$f_1(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \quad f_2(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad f_4(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

> 1. Comme $|\sin(t)| \leq 1$, on obtient
> $$|f_1(x,y)| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.$$
> Or
> $$|x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$
> Par le théorème d'encadrement,
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0.$$
> 2. Comme $f_2(t,0) = 1$ et $f_2(0,t) = -1$ pour tout $t \neq 0$,
> $$\lim_{t\to 0} f_2(t,0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} f_2(0,t) = -1,$$

Si f admettait une limite en $(0,0)$, on aurait $\lim_{t\to 0} f_2(t,0) = \lim_{t\to 0} f_2(0,t)$, ce qui est faux. Ainsi, f_2 n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3. Pour tout $x \neq 0$,

$$f_3(x,x) = \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x},$$

donc

$$f_3(x,x) \xrightarrow[x\to 0]{} \pm\infty.$$

Par conséquent, f_3 n'admet pas de limite finie en $(0,0)$.

4. On utilise les inégalités

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \qquad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ainsi,

$$|f_4(x,y)| = \frac{|x^2 y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Comme

$$\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_4(x,y) = 0.$$

Exercice 37.3 (★★★)

1. Justifier que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_1 : t \mapsto f(t,a_2)$ et $f_2 : t \mapsto f(a_1,t)$ sont continues respectivement en a_1 et a_2.
2. En considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, montrer que la réciproque est fausse.

1. Si f est continue, fixons $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, et soit $\varepsilon > 0$.

   Soit alors $\eta > 0$ tel que pour $(x,y) \in \mathscr{B}((a_1,a_2),\eta)$, $|f(x,y) - f(a_1,a_2)| < \varepsilon$.

   Alors en particulier, pour $|t-a_1| < \eta$, on a $\| (t,a_2) - (a_1,a_2) \| = |t-a_1| < \eta$, si bien que

$$|f_1(t) - f_1(a_1)| = |f(t,a_2) - f(a_1,a_2)| < \varepsilon.$$

   Et donc f_1 est continue en a_1.

   On prouve de même que f_2 est continue en a_2.

2. Pour montrer que la réciproque est fausse, utilisons la fonction donnée dans l'énoncé, et considérons $(a_1,a_2) = (0,0)$. Alors f_1 et f_2 sont constantes égales à 0. Donc en particulier, elles sont continues en 0.

   Pourtant, f n'est pas continue sur $(0,0)$. En effet, pour $x \neq 0$, on a

$$f(x,x) = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Exercice 37.4 (★★)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert que l'on précisera, et déterminer leurs dérivées partielles.

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy), \qquad g(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}e^x, \qquad h(x,y) = \ln(2xy)\sin(x^2+y).$$

- Pour f :

  $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto xy$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car ce sont des polynômes et $x \mapsto \cos(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opération sur des fonctions $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

  Elle admet en particulier des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(xy) - (x^2+y^2)y\sin(xy)$$

  et

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(xy) - (x^2+y^2)x\sin(xy).$$

- Pour g :

  $(x,y) \mapsto x^2-y^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est un polynôme, $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opération sur des fonctions $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2>0\}$.

  Elle admet en particulier des dérivées partielles sur $\mathscr{O}$ et on a :

  $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt{x^2-y^2}\right)e^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-ye^x}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

- Pour h :

  $(x,y) \mapsto 2xy$ et $(x,y) \mapsto x^2+y$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car ce sont des polynômes, $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sin(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opération sur des fonctions $\mathscr{C}^1$, h est $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy>0\}$.

  Elle admet en particulier des dérivées partielles sur $\mathscr{O}$ et on a :

  $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}\sin(x^2+y) + 2x\ln(2xy)\cos(x^2+y)$$

  et

  $$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}\sin(x^2+y) + \ln(2xy)\cos(x^2+y).$$

Exercice 37.5 (★★★)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx,ty) = tf(x,y)$.

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, calculer la dérivée de f en $(0,0)$ selon le vecteur u.
2. En déduire que f est linéaire.

1. Notons que pour $t>0$, on a
   $$f(t,t) = tf(1,1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$
   Comme f est continue en $(0,0)$, on a donc $f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t) = 0$.

Calculons les dérivées partielles de f en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(1,0)}{x} = \lim_{x\to 0} f(1,0) = f(1,0).$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,1)$.

Ainsi, pour $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée de f en $(0,0)$ dans la direction de u est

$$\langle \nabla f(0,0), u\rangle = u_1 f(1,0) + u_2 f(0,1).$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f((0,0)+t(x,y)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tx,ty)}{t} = \lim_{t\to 0^+} f(x,y) = f(x,y).$$

Or ceci est exactement la définition de la dérivée en 0 de $t \mapsto f((0,0)+t(x,y))$, c'est-à-dire la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ selon le vecteur (x,y). D'après la question précédente, c'est donc $xf(1,0) + yf(0,1)$. Ainsi,

$$f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1)$$

et f est donc bien linéaire.

Exercice 37.6 (★★★)

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction f est obtenue par opérations usuelles sur des fonctions continues avec un dénominateur strictement positif. Elle est donc continue.

Il reste à étudier la continuité en $(0,0)$.

Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Comme

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

on obtient

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ainsi,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

et f est continue en $(0,0)$.

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, donc admet des dérivées partielles.
   Étudions le point $(0,0)$.

   Dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}.$$

   Or,

$$f(t,0) = 0,$$

   donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

   De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$$

   Ainsi, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(x^2+y^2)^{-1/2} - x^2y(x^2+y^2)^{-3/2}.$$

   Après simplification,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

   Pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$, cette dérivée partielle devrait être continue en $(0,0)$.
   Considérons la droite $y = x$ avec $x > 0$.
   Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \frac{x^3}{2^{3/2}x^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

   Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

   Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

   La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas continue en $(0,0)$.
   Par conséquent, f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On a ainsi démontré que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, admet des dérivées partielles partout, mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 37.7 (★★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x^2+y^2-xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \frac{1}{2}(x-y)^2.$$
Comme $(x-y)^2 \geq 0$, on obtient
$$x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
2. (a) D'après la question précédente,
$$x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
Ainsi,
$$x^2+y^2-xy = 0 \Longrightarrow x^2+y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0.$$
Le dénominateur ne s'annule donc qu'en $(0,0)$, point où la fonction est définie par la valeur α.
Ainsi, le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction est rationnelle à dénominateur non nul, donc continue.
Étudions la limite en $(0,0)$.
Grâce à la question 1,
$$|f(x,y)| = \frac{|y|^4}{x^2+y^2-xy} \leq \frac{2|y|^4}{x^2+y^2}.$$
Or
$$y^2 \leq x^2+y^2,$$
donc
$$|f(x,y)| \leq 2y^2.$$

Par conséquent,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

La fonction est donc continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = 0$.

3. On suppose désormais $\alpha = 0$.

   (a) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les théorèmes généraux assurent l'existence des dérivées partielles. Par la formule de dérivation d'un quotient,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2},$$

   et

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^3(4x^2+2y^2-3xy)}{(x^2+y^2-xy)^2}.$$

   (b) Calculons les dérivées partielles à l'origine.
   Comme

   $$f(h,0) = 0,$$

   on obtient

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$

   De même,

   $$f(0,h) = \frac{h^4}{h^2} = h^2,$$

   d'où

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0.$$

   (c) Vérifions la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$.
   Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \frac{|y|^4\,|2x-y|}{(x^2+y^2-xy)^2}.$$

   D'après la question 1,

   $$(x^2+y^2-xy)^2 \geq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2.$$

   Ainsi,

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 4\,\frac{|y|^4\,|2x-y|}{(x^2+y^2)^2}.$$

   Comme

   $$|y|^4 \leq (x^2+y^2)^2, \qquad |2x-y| \leq 3\sqrt{x^2+y^2},$$

on obtient

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 12\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

De même,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 4\,\frac{|y|^3\,|4x^2+2y^2-3xy|}{(x^2+y^2)^2}.$$

Or

$$|4x^2+2y^2-3xy| \leq 6(x^2+y^2),$$

ce qui donne

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 24\,\frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq 24\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Les deux dérivées partielles sont continues en $(0,0)$.
Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 37.8 (★★★)
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction est quotient de fonctions polynomiales avec dénominateur non nul, donc elle est continue.

   Il reste à étudier la continuité en $(0,0)$.

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

   $$|f(x,y)| = \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|.$$

   Or

   $$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

   Ainsi,

   $$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Comme $f(0,0)=0$, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

   Calculons les dérivées partielles pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

   Calculons ensuite les dérivées partielles en l'origine :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

   Il reste à vérifier la continuité de ces dérivées en $(0,0)$.

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y| \frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

   Or

$$x^4+4x^2y^2+y^4 \leq 2(x^2+y^2)^2,$$

   d'où

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

   Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

   De même,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

   donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

   Les dérivées partielles sont donc continues en l'origine.

   Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 37.9 (★★)
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

> La fonction f possède bien des dérivées partielles en $(0,0)$ car :
>
> - Pour tout $x \neq 0$,
> $$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
> donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.
> - Pour tout $y \neq 0$,
> $$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1$$
> donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.
>
> Pourtant, elle n'est pas continue en $(0,0)$, puisque
> $$f(x^3,x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \pm\infty.$$

Exercice 37.10 (★★)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$.
   Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$.
   Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles de h en fonction des dérivées partielles de f.

> 1. Les fonctions $x : t \mapsto 2+2t$ et $y : t \mapsto t^2$ étant polynomiales, elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme f est aussi de classe $\mathscr{C}^1$, g est également de classe $\mathscr{C}^1$.
>
>   Par la formule de dérivation d'une composée,
> $$\begin{aligned} g'(t) &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)). \\ &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(2+2t,t^2) + 2t\,\frac{\partial f}{\partial y}(2+2t,t^2). \end{aligned}$$
>
> 2. Les fonctions $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u^2+v^2$ étant polynomiales, elles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, h est de classe $\mathscr{C}^1$.
>
>   Pour calculer les dérivées partielles, on applique la règle de la chaîne :
>
>   - Dérivée partielle par rapport à u :
>   Comme
> $$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = 2u,$$

on obtient
$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = v\,\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2u\,\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2).$$

- Dérivée partielle par rapport à v : Comme
$$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = u, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = 2v,$$
on obtient
$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = u\,\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2v\,\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2).$$

Exercice 37.11 (★★)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Même question avec la fonction v définie sur $\mathbb{R}^2$ par $v(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit ϕ une primitive de la fonction continue φ sur $\mathbb{R}$. Alors ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$u(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\,dt = \phi(x+y) - \phi(x-y).$$
Les applications $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto x-y$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ (car polynomiales), la fonction u est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$. En appliquant la règle de la chaîne, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \phi'(x+y) - \phi'(x-y) = \varphi(x+y) - \varphi(x-y),$$
et
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \phi'(x+y) + \phi'(x-y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$
2. En notant toujours ϕ une primitive de classe $\mathscr{C}^1$ de la fonction continue φ sur $\mathbb{R}$, on a
$$v(x,y) = \int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\,dt = \phi(xy) - \phi(x^2).$$
Les applications $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto x^2$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ (car polynomiales), la fonction v est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$. En appliquant la règle de la chaîne, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = y\phi'(xy) - 2x\phi'(x^2) = y\varphi(xy) - 2x\varphi(x^2),$$
et
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = x\phi'(xy) + 0\phi'(x^2) = x\varphi(xy).$$

Exercice 37.12 (★★★)

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

où f est une fonction inconnue de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On pose $\phi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ qui est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,
$$F(u, v) = f \circ \phi^{-1}(u, v)$$
de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x, y) = F \circ \phi(x, y) = F(ax + by, cx + dy).$$
Former une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.

2. En choisissant astucieusement les réels a, b, c, d, déterminer F puis f.

> 1. On va noter $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ les dérivées partielles respectives de F. D'après la règle de la chaîne, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a\frac{\partial F}{\partial u}(ax + by, cx + dy) + c\frac{\partial F}{\partial v}(ax + by, cx + dy)$$
> et
> $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b\frac{\partial F}{\partial u}(ax + by, cx + dy) + d\frac{\partial F}{\partial v}(ax + by, cx + dy).$$
> L'équation aux dérivées partielles devient
> $$(2a - b)\frac{\partial F}{\partial u} + (2c - d)\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$
>
> 2. Si on pose $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 2$, on a $ad - bc \neq 0$ et l'équation aux dérivées partielles devient
> $$\frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$
> On en déduit donc qu'il existe une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,
> $$F(u, v) = H(v).$$
> Revenant à f, on trouve $f(x, y) = H(x + 2y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
>
> Réciproquement, on vérifie facilement que toutes les fonctions qui s'écrivent ainsi sont solution.

Exercice 37.13 (★★★)

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 16y.$$

Résoudre cette équation en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Posons $\phi(x,y) = (x+y, x-y)$ qui est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose aussi $F(u,v) = f \circ \phi^{-1}(u,v)$, de sorte que $f(x,y) = F \circ \phi(x,y) = F(x+y, x-y)$. On a alors par la règle de la chaîne, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial u}(x+y, x-y) + \frac{\partial F}{\partial v}(x+y, x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial u}(x+y, x-y) - \frac{\partial F}{\partial v}(x+y, x-y).$$

De plus, dans les nouvelles coordonnées, on vérifie facilement que

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

Ainsi, si f est solution de l'équation aux dérivées partielles initiales, F vérifie, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = 8\frac{u+v}{2} + 16\frac{u-v}{2} = 12u - 4v.$$

On résout cette équation en intégrant par rapport à v : il existe une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(u,v) = 6uv - v^2 + H(u).$$

Revenant à f, on a prouvé que si f est solution de l'équation différentielle initiale, alors f s'écrit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 6(x+y)(x-y) - (x-y)^2 + H(x+y) \\ &= 5x^2 + 2xy - 7y^2 + H(x+y). \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction s'écrivant ainsi est solution de l'équation aux dérivées partielles initiale.

Exercice 37.14 (★★★★)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

On utilisera le changement de variables $u = x$ et $v = x - y$.

Posons $g(u,v) = f(u, u-v)$. Par la règle de la chaîne, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, u-v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, u-v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial y}(u, u-v).$$

Avec la première égalité, on a donc que f est solution de l'équation indiquée si et seulement si pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(u, u-v) = g(u,v).$$

Ceci est le cas si et seulement si pour tout v fixé, $u \mapsto g(u,v)$ est solution de l'équation différen-

tielle $y' - y = 0$.
C'est le cas si et seulement si il existe $C(v)$ tel. que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u,v) = C(v)e^u$. Notons qu'on a alors $C(v) = g(0,v)$.
Donc C est dérivable puisque $v \mapsto g(0,v)$ l'est (de dérivée $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,v)$). Et par continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, C' est continue, si bien que C est $\mathscr{C}^1$.
Ainsi, il existe $C \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = C(v)e^u$. Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x, x-y) = C(x-y)e^x$.

Inversement, soit C une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et soit $f : (x,y) \mapsto C(x-y)e^x$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations usuelles sur les fonctions $\mathscr{C}^1$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = C(x-y)e^x + C'(x-y)e^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -C'(x-y)e^x,$$

si bien que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = C(x-y)e^x = f(x,y).$$

Extrema

Exercice 37.15 (★★)

On considère la fonction f définie, pour tout (x,y) de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
2. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
3. (a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.
   (b) En déduire que f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
4. Soit g la fonction définie pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :
   $$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y).$$
   Montrer que g admet un minimum global sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et donner sa valeur.

1. Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$,
   $$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2.$$
   Les fonctions
   $$(x,y) \longmapsto \frac{x}{y} \qquad \text{et} \qquad (x,y) \longmapsto \frac{y}{x}$$
   sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ puisque les dénominateurs ne s'y annulent jamais.
   Par somme, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
2. On calcule les dérivées partielles :
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}.$$

Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2} = 0, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2} = 0. \end{cases}$$

La première équation donne

$$x^2 = y^2.$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$, on obtient

$$x = y.$$

La seconde équation conduit à la même condition.

Ainsi, l'ensemble des points critiques est

$$\{(t,t)\ ;\ t > 0\}.$$

3. (a) On a

$$(x+y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.$$

Comme $(x-y)^2 \geq 0$, il vient

$$(x+y)^2 \geq 4xy.$$

(b) Comme

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy},$$

et puisque $(x+y)^2 \geq 4xy$, on obtient

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4.$$

Or, $f(t,t) = 4$ pour tout $t > 0$. Ce minimum est donc atteint en tout point critique (t,t) avec $t > 0$. Finalement :

$$\min_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} f(x,y) = 4.$$

4. On considère

$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y).$$

En utilisant les propriétés du logarithme,

$$g(x,y) = \ln\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right) = \ln(f(x,y)) .$$

Comme la fonction logarithme est strictement croissante,

$$\min_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} g(x,y) = \ln\left(\min_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} f(x,y)\right) = \ln(4) = 2\ln(2).$$

Ainsi, g admet un minimum global sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ qui vaut $2\ln(2)$ et qui est atteint en tout point de la forme (t,t) avec $t>0$.

Exercice 37.16 (★★)
On considère la fonction f définie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
3. Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en $(0,0)$.
4. (a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2$.
   (b) Que peut-on déduire des points critiques $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$?
5. Une de ces trois figures représente le graphe de f. Laquelle ? Justifier la réponse.

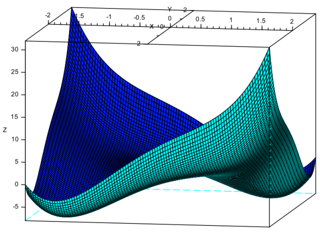


Figure 1

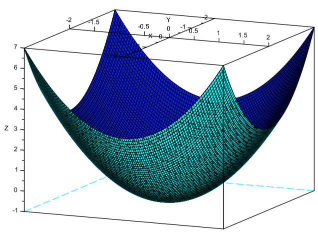


Figure 2

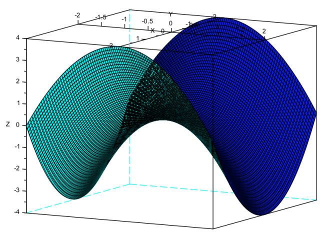


Figure 3

1. La fonction f est un polynôme en les variables x et y donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) On dérive terme à terme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x^3-x+y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(y^3+x-y).$$

   (b) Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} x^3-x+y=0,\\ y^3+x-y=0.\end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient

$$x^3+y^3=0,$$

soit

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=0.$$

Comme

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0,$$

et ne s'annule qu'en $(0,0)$, on en déduit

$$x+y=0.$$

Ainsi,

$$y=-x.$$

En remplaçant dans la première équation :

$$x^3-2x=0,$$

c'est-à-dire

$$x(x^2-2)=0.$$

Donc

$$x\in\{0,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}.$$

Comme $y=-x$, les points critiques sont $(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3. Considérons d'abord la restriction à la droite $y=x$:

$$f(x,x)=2x^4.$$

Ainsi,

$$f(x,x)>0\quad \text{pour } x\neq 0,$$

et

$$f(x,x)\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

Considérons ensuite la restriction à la droite $y=-x$:

$$f(x,-x)=2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4).$$

Au voisinage de 0, on a $x^2-4<0$, donc

$$f(x,-x)<0\quad \text{pour } x\neq 0 \text{ assez petit.}$$

Ainsi, au voisinage de $(0,0)$:

$$f(x,x)>0,\qquad f(x,-x)<0.$$

La fonction prend donc des valeurs de signes opposés dans tout voisinage de $(0,0)$.
Par conséquent, $(0,0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local (c'est un point selle).

4. (a) Développons :

$$(x^2-2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4,$$

$$(y^2-2)^2 = y^4 - 4y^2 + 4,$$

$$2(x+y)^2 = 2x^2 + 4xy + 2y^2.$$

La somme vaut

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8.$$

Or

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Par différence,

$$f(x,y) - \left[(x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\right] = -8.$$

Donc

$$f(x,y) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 - 8.$$

(b) L'écriture précédente montre que

$$f(x,y) + 8 = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2.$$

Le membre de droite est une somme de termes positifs ou nuls.
On en déduit que

$$f(x,y) \geq -8 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Or

$$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8,$$

donc $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

5. Le graphe de f est représenté par la figure 1.
On retrouve en effet le minimum -8 de f atteint en deux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
On retrouve également le point selle en $(0,0)$.

Exercice 37.17 (★★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.

(a) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.

(b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un minimum noté $g(y)$.

(c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le ou les point(où ce minimum est atteint.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t,0) = t^4$. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^4 = +\infty$, la fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, f n'admet pas de maximum.

2. (a) On remarque que

$$f(-x,-y) = (-x)^4 + (-y)^4 - 4(-x)(-y) = x^4 + y^4 - 4xy = f(x,y).$$

Ainsi, si f possède un minimum en (x,y), alors $(-x,-y)$ l'est aussi. Pour tout couple (x,y), l'un des deux nombres y et $-y$ est positif ou nul. Il suffit donc d'étudier les points de minimum éventuels avec $y \geq 0$.

(b) Soit $y \geq 0$ fixé. Considérons la fonction $g_y(x) = f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g_y'(x) = 4x^3 - 4y.$$

Comme $y \geq 0$, g_y est décroissante sur $]-\infty, \sqrt[3]{y}]$ et croissante sur $[\sqrt[3]{y}, +\infty[$. Donc g_y admet un minimum en $\sqrt[3]{y}$ qui vaut :

$$g(y) = f\left(y^{1/3}, y\right) = (y^{1/3})^4 + y^4 - 4y^{1/3} = y^{4/3} + y^4 - 4y^{4/3} = y^4 - 3y^{4/3}.$$

(c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y > 0$, $g'(y) = 4(y^3 - y^{1/3})$. On en déduit le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Elle admet donc un minimum en $y = 1$, et ce minimum vaut $g(1) = -2$. On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad f(x,y) \geq g(y) \geq -2.$$

De plus, $f(x,y) = -2$ si et seulement si les inégalités ci-dessus sont des égalités. En particulier, il faut avoir $g(y) = -2 \Leftrightarrow y = 1$. Et il faut alors également que $f(x,1) = g_1(x) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$.

Enfin, si $y \leq 0$, on a

$$f(x,y) = f(-x,-y) \geq -2$$

avec égalité si et seulement si $(-x,-y) = (-1,-1)$.

Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq -2$, avec égalité si et seulement si $(x,y) = (1,1)$ ou $(x,y) = (-1,-1)$.

La fonction f possède donc un minimum atteint en deux points qui sont $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

Exercice 37.18 (★★★)

Déterminer les extrema locaux de $f(x,y) = e^{x\sin(y)}$.

> La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc elle admet des dérivées partielles et on a :
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)e^{x\sin(y)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(y)e^{x\sin(y)}.$$
>
> On cherche les points critiques de f :
>
> $$(x,y) \text{ point critique de } f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(y) = 0 \\ x\cos(y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$
>
> Ainsi, f admet un unique point critique en $(0,0)$ et $f(0,0) = 1$.
> Or, pour tout $x \in]0,\pi[$,
>
> $$f(x,x) = e^{x\sin(x)} > 1 = f(0,0) \quad \text{et} \quad f(-x,x) = e^{-x\sin(x)} < 1 = f(0,0).$$
>
> Donc f ne possède pas d'extremum en $(0,0)$.
> Finalement, f n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}^2$.