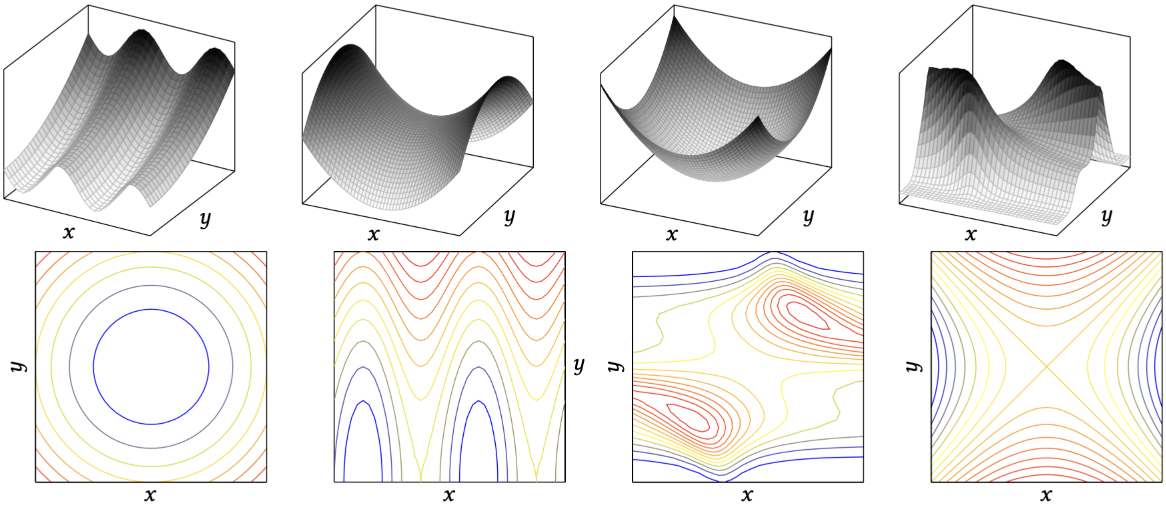
TD 37

Fonctions de deux variables

Graphe, lignes de niveau

Exercice 37.1 (★)

Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau.



Continuité, dérivées partielles

Exercice 37.2 (★)

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

$$f_1(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \quad f_2(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad f_4(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Exercice 37.3 (★★★)

1. Justifier que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_1 : t \mapsto f(t,a_2)$ et $f_2 : t \mapsto f(a_1,t)$ sont continues respectivement en a_1 et a_2.
2. En considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 37.4 (★★)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert que l'on précisera, et déterminer leurs dérivées partielles.

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy), \qquad g(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}e^x, \qquad h(x,y) = \ln(2xy)\sin(x^2+y).$$

Exercice 37.5 (★★★)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx,ty) = tf(x,y)$.

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, calculer la dérivée de f en $(0,0)$ selon le vecteur u.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 37.6 (★★★)
On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 37.7 (★★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 37.8 (★★★)
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 37.9 (★★)
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 37.10 (★★)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$.
   Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$.
   Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles de h en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 37.11 (★★)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(x, y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

2. Même question avec la fonction v définie sur $\mathbb{R}^2$ par $v(x, y) = \displaystyle\int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 37.12 (★★★)

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

où f est une fonction inconnue de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On pose $\phi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ qui est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

   $$F(u, v) = f \circ \phi^{-1}(u, v)$$

   de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$f(x, y) = F \circ \phi(x, y) = F(ax + by, cx + dy).$$

   Former une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.

2. En choisissant astucieusement les réels a, b, c, d, déterminer F puis f.

Exercice 37.13 (★★★)

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 16y.$$

Résoudre cette équation en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 37.14 (★★★★)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

On utilisera le changement de variables $u = x$ et $v = x - y$.

Extrema

Exercice 37.15 (★★)

On considère la fonction f définie, pour tout (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

2. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

3. (a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.

   (b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

4. Soit g la fonction définie pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que g admet un minimum global sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et donner sa valeur.

Exercice 37.16 (★★)

On considère la fonction f définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en $(0, 0)$.
4. (a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
   (b) Que peut-on déduire des points critiques $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$?
5. Une de ces trois figures représente le graphe de f. Laquelle ? Justifier la réponse.

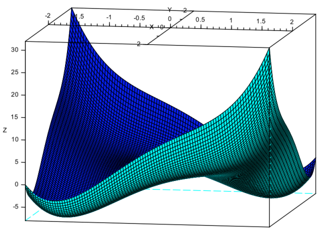


Figure 1

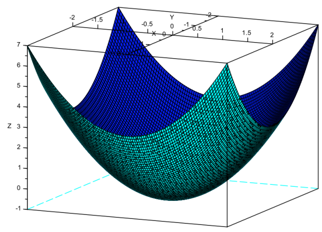


Figure 2

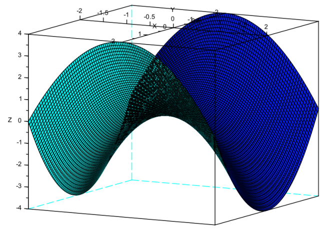


Figure 3

Exercice 37.17 (★★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet par de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
   (a) En considérant $f(-x, -y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
   (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 37.18 (★★★)

Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = e^{x\sin(y)}$.
