

Rappels et compléments sur les fonctions

Généralités sur les fonctions

Exercice 4.1 (★★ - 📖)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. la somme de deux fonctions croissantes est croissante. 2. la somme de deux fonctions monotones est monotone. 3. le produit de deux fonctions monotones est monotone. 4. si f est paire, alors $g \circ f$ est paire. 5. si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire. 6. si f est paire, alors f' est paire. | <ol style="list-style-type: none"> 7. si f est périodique, alors $g \circ f$ est périodique. 8. si g est périodique, alors $g \circ f$ est périodique. 9. si g est bornée, alors $g \circ f$ est bornée. 10. si $g \circ f$ est bornée, alors g est bornée. 11. le produit de deux fonctions majorées est majoré. 12. le produit de deux fonctions bornées est borné. |
|---|---|

Exercice 4.2 (★★)

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k -périodique.
2. (a) Que dire d'une fonction périodique et croissante ?
(b) D'une fonction périodique et strictement croissante ?

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons établi au chapitre 3 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

D'où ici :

$$\left\lfloor \frac{x+k}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_k(x+k) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 - \left(\frac{\lfloor x \rfloor + k}{k} \right) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k} = f_k(x).$$

Donc f_k est k -périodique.

2. Prouvons qu'une fonction périodique et croissante est nécessairement constante.

Soit donc $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction périodique et constante. Nous allons prouver que $\forall x, y \in \mathcal{D}, f(x) = f(y)$, ce qui est l'une des caractérisations des fonctions constantes.

Soient donc $x, y \in \mathcal{D}$. Quitte à les échanger, supposons que $x \leq y$. Notons T une période de f , et soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $x + nT \geq y$ (un tel entier existe bien puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x + nT = +\infty$).

On a alors $x \leq y$, donc par croissance de f , $f(x) \leq f(y)$.

Et $y \leq x + nT$, donc par croissance de f , $f(y) \leq f(x + nT)$.

Or par T -périodicité de f , $f(x + nT) = f(x)$.

On a donc $f(x) \leq f(y) \leq f(x)$, si bien que $f(x) = f(y)$.

Donc une fonction continue et périodique est constante.

En revanche, il n'existe pas de fonction périodique et strictement croissante.

En effet, supposons qu'une telle fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$, T -périodique et strictement croissante existe.

Soit alors $x \in \mathcal{D}$. On a $x + T > x$, et donc $f(x + T) > f(x)$, ce qui contredit la définition de la T -périodicité.

Exercice 4.3 (★★★)

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Justifier que la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation $x = \frac{a}{2}$ envoie un point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(a - x, y)$.
2. Soit $f : [0, a] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in [0, a]$, $f(x) = f(a - x)$. Justifier alors que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sin(x) |2 \cos^2(x) - 1|$.
 - (a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (b) (★) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 4.4 (★★★★)

Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$.

Prouver que f est périodique.

Notons que l'équation implique que nécessairement $f(x)$ est toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 (car $f(x) - f(x)^2 \geq 0$ si, et seulement si, $f(x) \in [0, 1]$).

On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
 f(x + 2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - f(x + a)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f(x)^2} - f(x) + f(x)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} \quad \text{car } f(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Donc ceci prouve que f est $2a$ -périodique.

Exercice 4.5 (Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) - ★★★★★)

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et y : $f(xf(y)) = yf(x)$ ($\mathcal{R}$).

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème posé.
2. Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f (c'est-à-dire la seule solution éventuelle de l'équation $f(x) = x$) est 1.
3. En déduire que g est la seule solution au problème posé.

1. C'est une vérification immédiate.

2. Si f est une solution, et si α est un point fixe de f , alors $f(\alpha) = \alpha$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient en prenant $y = \alpha$ dans ($\mathcal{R}$), $f(x\alpha) = \alpha f(x)$.

Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x\alpha^2) = f((x\alpha)\alpha) = \alpha f(x\alpha) = \alpha^2 f(x).$$

Puis de même, $f(x\alpha^3) = \alpha f(x\alpha^2) = \alpha^3 f(x)$. Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x\alpha^n) = \alpha^n f(x).$$

Étudions les deux cas suivants :

- supposons que $\alpha > 1$. Alors $x\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc par hypothèse, $f(x\alpha^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Mais $f(x\alpha^n) = \alpha^n f(x)$. Or, f étant supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est non nul, et donc $\alpha^n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où une contradiction.

Donc déjà, on ne peut pas avoir $\alpha > 1$.

- Supposons à présent $\alpha < 1$. On a toujours $f(x\alpha^n) = \alpha^n f(x)$, mais cette fois, $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui ne nous avance pas beaucoup...

On a alors $\alpha = f(\alpha) = f(1 \times \alpha) = f(1f(\alpha)) = \alpha f(1)$. Et donc en divisant par α , $f(1) = 1$. Et alors :

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) = f\left(\frac{1}{\alpha}f(\alpha)\right) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

de sorte que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$. Et donc $\frac{1}{\alpha}$ est également un point fixe de f . Or, $\frac{1}{\alpha} > 1$, et nous avons déjà dit qu'il ne pouvait y avoir de points fixes supérieurs strictement à 1.

Donc il n'y a pas non plus de points fixes de f dans $]0, 1[$.

Le seul point fixe éventuel de f est 1.

3. Nous n'avons pas encore dit qu'une fonction f solution au problème posé possède un point fixe ! Mais notons que si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors en prenant $y = x$ dans la relation ($\mathcal{R}$), on a $f(xf(x)) = xf(x)$.

Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xf(x)$ est un point fixe de f , qui possède donc au moins un point fixe. Et d'après la question précédente, ce point fixe ne peut être que 1. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} = g(x).$$

Et donc g est la seule fonction qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Limites

Exercice 4.6 (★★)

Déterminer les limites de :

$$\begin{array}{l|l} f_1 : x \mapsto \frac{1-5x}{5+x} \text{ en } -5, +\infty \text{ et } -\infty ; & f_3 : x \mapsto \frac{3x^2-x-2}{x^4-1} \text{ en } 1, +\infty \text{ et } -\infty ; \\ f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \text{ en } +\infty \text{ et } -\infty ; & f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+1} - x + 2 \text{ en } +\infty ; \\ & f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+9} + x - 3 \text{ en } -\infty. \end{array}$$

Exercice 4.7 (★★)

1. Calculer la limite en 1 de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$(a) \ x \mapsto x \sin\left(\frac{3}{x}\right) ; \quad \quad \quad (b) \ x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}.$$

3. Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$(a) \ x \mapsto \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} ; \quad \quad (b) \ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} ; \quad \quad (c) \ x \mapsto \frac{e^{2x}-e^{-x}}{x}.$$

Dérivées

Exercice 4.8 (★)

Étudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{(\cos(x)+1)^4} \quad f_4 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right)$$

Exercice 4.9 (★★)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \frac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m .

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 4.10 (★★ - 📌)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$. Calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Plus généralement, si f est une fonction polynomiale de degré n , montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
 - si $k \leq n$, $f^{(k)}$ est polynomiale de degré $n - k$;
 - si $k \geq n + 1$, $f^{(k)}$ est la fonction nulle.

Exercice 4.11 (★★★★)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée n -ème pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$f_1 : x \mapsto e^{ax+b}, a \neq 0 ; \quad \left| \quad f_2 : x \mapsto \frac{2}{1+3x} ; \quad \left| \quad f_3 : x \mapsto \sin(x).$$

Étude de fonctions et inégalités**Exercice 4.12 (★★)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
2. Déterminer les asymptotes au graphe de f .

Exercice 4.13 (★★)

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}}$.

Est-elle bornée ? Possède-t-elle des extrema sur son ensemble de définition ?

Exercice 4.14 (★★)

1. Montrer que, pour x et y strictement positifs : $x \ln x + y \ln y \leq (x+y) \ln(x+y)$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in]-1, 1[$: $\frac{x-y}{1+xy} \in]-1, 1[$.

1. On fixe $y > 0$, et on étudie la fonction $f_y : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x+y) \ln(x+y) - x \ln(x) - y \ln(y)$. Elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition, et pour tout $x > 0$:

$$f'_y(x) = \ln(x+y) + 1 - (\ln(x) + 1) = \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) > 0.$$

Donc f_y est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_y(x) = y \ln(y) - 0 - y \ln(y) = 0.$$

Par conséquent, $f_y(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Et on a bien établi l'inégalité voulue pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

2.

Exercice 4.15 (★★)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Prouver l'inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout nombre positif x .
2. Encadrer $\ln(u_n)$, puis déduire les limites de $\ln(u_n)$ et de u_n .

1. On obtient ces inégalités en étudiant successivement les fonctions $f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

2. Soit $n \geq 1$, et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient en appliquant l'inégalité précédente pour $x = \frac{k}{n^2}$:

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

Sommons ces inégalités pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

ce qui se récrit :

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}}_{=v_n} \leq \ln(u_n) \leq \underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{w_n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{12n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{2}$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n)$ existe et est égale à $\frac{1}{2}$. Par composition par l'exponentielle qui est continue en $\frac{1}{2}$, on en déduit que (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{1/2}$.

Bijections**Exercice 4.16 (★)**

1. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{2x+1}{x-3} \end{cases}$ réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sur un ensemble à préciser.
2. Déterminer alors f^{-1} .

Exercice 4.17 (★★)

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 4.18 (★★)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une application réciproque qu'on notera g .
4. Donner le domaine de définition de g , son domaine de continuité ainsi que son sens de variation.
5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
6. Expliciter la fonction g .

Exercice 4.19 (★★★)

Soit $a > 0$, soit I une partie de $\mathbb{R}$, et soit $f :]-a, a[\rightarrow I$ une fonction impaire réalisant une bijection de $] - a, a[$ sur I . Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

Avant toute chose, remarquons que I doit être symétrique pour que la notion d'imparité possède bien un sens.

Soit donc $x \in I$. Alors $f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x)) = -x$. Puisque $f^{-1}(x) \in]-a, a[$, alors $-f^{-1}(x) \in]-a, a[$, et donc $-x$ est bien l'image d'un élément de $] - a, a[$, donc il est dans I . Ceci prouve donc que I est nécessairement symétrique.

Mieux : nous venons de prouver que $-f^{-1}(x)$ est un antécédent de $-x$ par f . Mais f étant réalisant une bijection de $] - a, a[$ sur I , un tel antécédent est unique, et c'est $f^{-1}(-x)$. Et donc $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$: la fonction f^{-1} est impaire.

Si f est paire, $f(\frac{a}{2}) = f(-\frac{a}{2})$, et donc ce nombre possède deux antécédents distincts par f .

Donc f ne réalise pas une bijection de $] - a, a[$ sur I et par conséquent, f^{-1} n'existe pas.

Exercice 4.20 (★★★★)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-x^2 + 8x - 12}{x^2 - 4x + 3}$.

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative.
2. Pour tout nombre réel r , on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = r\}$.
Montrer qu'il contient en général deux éléments, et préciser les cas d'exception.
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.
Étudier la fonction g et construire sa courbe représentative.

1. Commençons par écrire f sous forme factorisée, ce qui facilitera son étude :

$$f(x) = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-1)(x-3)}.$$

La fonction f est bien définie lorsque le quotient a un sens, c'est-à-dire lorsque $x \neq 1, 3$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. De plus, f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient

de fonctions dérivables. On obtient alors après simplification que pour tout $x \neq 1, 3$:

$$f'(x) = -2 \frac{2x^2 - 9x + 12}{(x-1)^2(x-3)^2}.$$

Le discriminant du polynôme au numérateur étant strictement négatif, $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 1, 3$, et f est strictement décroissante sur les intervalles $] -\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

On détermine les limites de f aux bords de son ensemble de définition. Écrivons :

$$\frac{-x^2 + 8x - 12}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1 + \frac{8}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}.$$

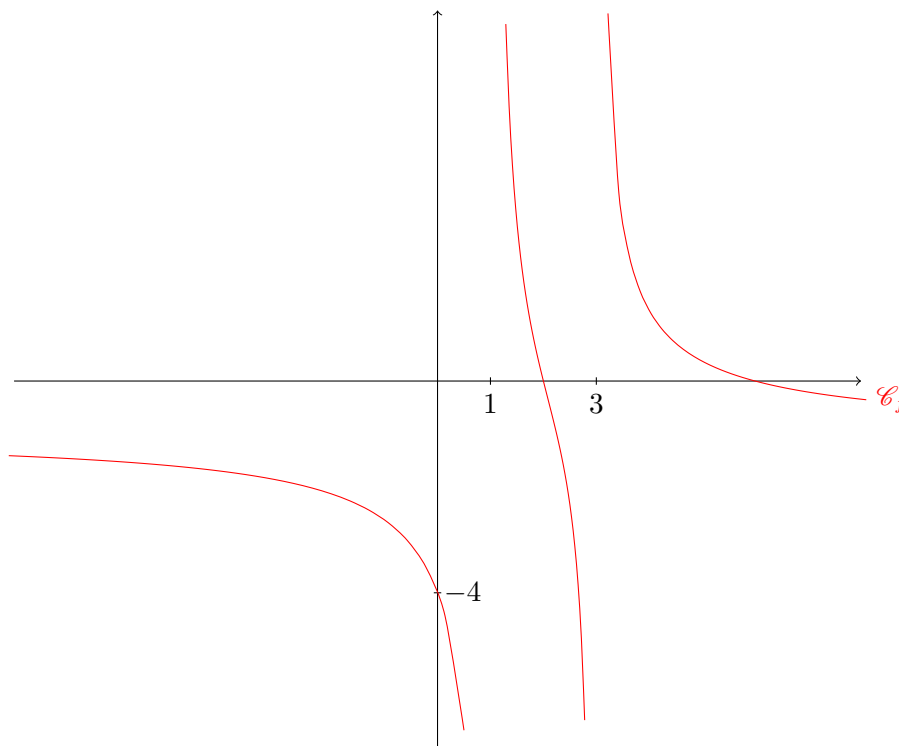
D'où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$.

On obtient les limites en 1 et en 3 grâce à l'expression factorisée de f :

$$f(x) = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-1)(x-3)}.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

On construit sa courbe représentative (on pourra utiliser la valeur $f(0) = -4$).



2. Pour tout nombre réel r , on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = r\}$.

Image réciproque d'ensemble.

$f^{-1}(\{r\})$ s'appelle l'image réciproque de l'ensemble $\{r\}$ par la fonction f . Il s'agit de l'ensemble des antécédents par f de r .

Par exemple, si f est la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \{2, -2\} \quad ; \quad f^{-1}(\{2\}) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad ; \quad f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\} \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{0\} \quad ; \quad f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

On fera attention à la notation f^{-1} : il ne s'agit pas ici de l'application réciproque de f . D'ailleurs f n'est pas supposée bijective ici (que ça soit la fonction carrée dans l'exemple, où la fonction f de l'exercice).

Montrons que cet ensemble contient en général deux éléments. Pour cela on va définir :

- f_1 la restriction de f à l'intervalle $] - \infty, 1[$,
- f_2 la restriction de f à l'intervalle $]1, 3[$,
- f_3 la restriction de f à l'intervalle $]3, +\infty[$.

On a montré que f_1 est continue et strictement décroissante sur $] - \infty, 1[$. Par le théorème de la bijection, f_1 réalise une bijection de $] - \infty, 1[$ sur l'intervalle $f_1(] - \infty, 1[) =] - \infty, -1[$. On notera dans la suite f_1^{-1} sa bijection réciproque.

De même, on montre que :

- la fonction f_2 réalise une bijection de $]1, 3[$ sur l'intervalle $f_2(]1, 3[) =] - \infty, +\infty[$. On notera dans la suite f_2^{-1} sa bijection réciproque ;
- la fonction f_3 réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur l'intervalle $f_3(]3, +\infty[) =] + \infty, -1[$. On notera dans la suite f_3^{-1} sa bijection réciproque.

Soit $r \in \mathbb{R}$, on a trois cas possibles :

- soit $r > -1$: alors d'après ce qu'on a fait, les équations $f_2(x) = r$ et $f_3(x) = r$ admettent une unique solution chacune, respectivement $\alpha_2 = f_2^{-1}(r)$ et $\alpha_3 = f_3^{-1}(r)$, tandis que l'équation $f_1(x) = r$ n'a pas de solution. On a donc dans ce cas :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\}.$$

Cet ensemble contient donc dans ce cas 2 éléments.

- soit $r < -1$: alors les équations $f_1(x) = r$ et $f_2(x) = r$ admettent une unique solution chacune, respectivement $\alpha_1 = f_1^{-1}(r)$ et $\alpha_2 = f_2^{-1}(r)$, tandis que l'équation $f_3(x) = r$ n'a pas de solution. On a donc dans ce cas :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Cet ensemble contient encore 2 éléments.

- soit $r = -1$: alors d'après ce qu'on a fait, l'équation $f_2(x) = r$ admet une unique solution notée $\beta = f_2^{-1}(r)$, tandis que les équations $f_1(x) = r$ et $f_3(x) = r$ n'ont pas de solution. On a donc dans ce cas :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\beta\}.$$

Cet ensemble contient cette fois 1 seul élément.

3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.

Le domaine de définition de g est le même que celui de f : en effet il faut et il suffit que $f(x)$ soit bien définie dans cette expression pour qu'elle ait un sens. De plus, $f^{-1}(\{f(x)\})$ est un ensemble contenant au moins un élément, l'élément x , et au plus deux comme nous l'avons vu à la question précédente. On a donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Posons $r = f(x)$. Plusieurs cas se présentent :

- si $x < 1$, alors $r = f(x) < -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{f_1^{-1}(r), f_2^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_1^{-1}(r) < f_2^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_2^{-1}(r) = f_2^{-1}(f(x))$.

- si $1 < x < \beta$, alors $r = f(x) > -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{f_2^{-1}(r), f_3^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_2^{-1}(r) < f_3^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_3^{-1}(r) = f_3^{-1}(f(x))$.

- si $x = \beta$, alors $r = f(\beta) = -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\beta\}.$$

On obtient donc : $g(\beta) = \beta$.

- si $\beta < x < 3$, alors $r = f(x) < -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{f_1^{-1}(r), f_2^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_1^{-1}(r) < f_2^{-1}(r)$, on obtient :

$$g(x) = f_2^{-1}(r) = f_2^{-1}(f(x)) = f_2^{-1}(f_2(x)) = x.$$

- enfin si $x > 3$, alors $r = f(x) > -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{f_2^{-1}(r), f_3^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_2^{-1}(r) < f_3^{-1}(r)$, on obtient :

$$g(x) = f_3^{-1}(r) = f_3^{-1}(f(x)) = f_3^{-1}(f_3(x)) = x.$$

Je vous laisse alors tenter de représenter la courbe représentative de g .