TD 6

Fonctions usuelles

Logarithme, exponentielle, puissances

Exercice 6.1 (★★)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $2^{x^2} = 3^{x^3}$;

(ii) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$;

(iii) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$;

(iv) $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$;

(v) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$;

(vi) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, avec $a > 0, a \neq 1$.

Exercice 6.2 (★★)

Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_2) : \begin{cases} x + y = 7 \\ \log(x) + \log(y) = 1 \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_3) : \begin{cases} xy = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{cases}$$

Exercice 6.3 (★★)

Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]0,1[$.

Exercice 6.4 (★★)

Calculer les limites suivantes :

(i) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$;

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$;

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^x - 1}$;

(iv) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;

(v) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ $(1 < a < b)$;

(vi) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 6.5 (★★)

On pose $f(x) = x^x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f, et étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
3. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
   Déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 6.6 (★ - Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Exercice 6.7 (★★)

1. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Procédons par Analyse-Synthèse.
   - **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$
   Tout d'abord, prenons $x = y = 1$. On obtient $f(1) = 2f(1)$ et donc $f(1) = 0$.
   On suppose maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et on dérive l'égalité $f(xy) = f(x) + f(y)$ par rapport à $y \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf'(xy) = f'(y).$$
   Faisons $y = 1$, il vient que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f'(1)/x,$$
   soit $f'(x) = \beta/x$ si on pose $\beta = f'(1)$. On en déduit que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \beta \ln(x) + \gamma,$$
   donc $f(x) = \beta \ln(x)$ puisque $f(1) = 0$.
   - **Synthèse.** Inversement, soit β un réel et $f : x \mapsto \beta \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$f(xy) = \beta \ln(xy) = \beta \ln(x) + \beta \ln(y) = f(x) + f(y).$$

   Les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle proposée sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \beta \ln(x)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Procédons de nouveau par Analyse-Synthèse.
   - **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$
   Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0+0) = f(0)^2$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$.
   Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$$
   et f est la fonction nulle.
   Supposons $f(0) = 1$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
   $$f(x+y) = f(x)f(y).$$
   Fixons $y \in \mathbb{R}$, et dérivons l'égalité précédente par rapport à la variable x :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f'(x)f(y).$$

En prenant $x = 0$, on obtient :

$$f'(y) = f'(0)f(y),$$

et ceci pour tout $y \in \mathbb{R}$. Notons $\alpha = f'(0)$. En multipliant l'égalité précédente par $e^{-\alpha y}$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[e^{-\alpha y}f(y)\right] = e^{-\alpha y}f'(y) - \alpha e^{-\alpha y}f(y) = 0.$$

La fonction $y \mapsto e^{-\alpha y}f(y)$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$e^{-\alpha y}f(y) = e^{-\alpha\times 0}f(0) = 1, \text{ et donc } f(y) = e^{\alpha y}.$$

- **Synthèse.** Si f est la fonction nulle, elle est bien dérivable et satisfait l'équation fonctionnelle de l'énoncé.

  Soient à présent $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
  $$f(x+y) = e^{\alpha(x+y)} = e^{\alpha x}e^{\alpha y} = f(x)f(y).$$

Les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle proposée sont donc la fonction nulle et les fonctions de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.8 (★★)
Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

- *Variations de f.*

  La fonction f est définie si, et seulement si, $x \neq 0$ et $1 + \frac{1}{x} > 0$. Ainsi, $\mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$. f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que composée de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathscr{D}_f$:

  $$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

  On ne peut donc pas conclure directement sur le signe de $f'(x)$. Posons $k : x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$. k est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$ et pour x dans l'un ou l'autre de ces intervalles :
  $$k'(x) = \frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

  Donc k est croissante sur $]-\infty, -1[$, décroissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$ (par quotient). Ainsi k est positive sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$. Donc f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$.

- *Limites de f aux bornes de son domaine de définition :*

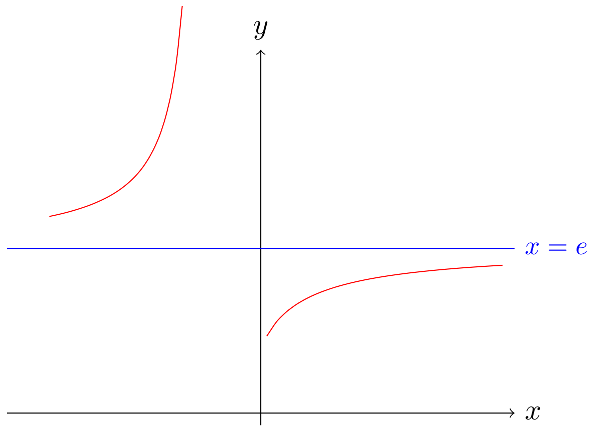
  En $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$ (par composition). De même, on trouve que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e$.

  En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}\ln\left(1+\dfrac{1}{X}\right)$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X} =$

0 (par croissances comparées) et $\lim_{X\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{X}\right) = \ln(1) = 0$ par composition. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (par composition). On peut alors prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

En -1 : $\lim_{x\to(-1)^-} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+$ donc par composition et produit, $\lim_{x\to(-1)^-} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$. Finalement, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ (par composition).

- *Courbe représentative de f :*



Fonctions hyperboliques

Exercice 6.9 (★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\text{ch}(x) = 3$; (ii) $7\text{ch}(x) + 2\text{sh}(x) = 9$; (iii) $\text{sh}(x) \leq 2$.

Exercice 6.10 (★)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(i) $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$;

(ii) $\text{ch}(x) = \sqrt{\dfrac{\text{ch}(2x)+1}{2}}$;

(iii) $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\,\text{sh}(y)$;

(iv) $\text{sh}(x) = \dfrac{2\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)^2}$.

(i) Partons plutôt du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y) &\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}\right) \\
&= \text{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

(ii) De même, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) &\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}-2e^{-x-y}\right)\\ &=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

Autre méthode. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Alors la dérivée de $x \mapsto \operatorname{ch}(x+y)$ est $x \mapsto \operatorname{sh}(x+y)$. Mais par la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$, et donc la dérivée de $x \mapsto \operatorname{ch}(x+y)$ est aussi $x \mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$. Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.

(iii) Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2} &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\\ &=\frac{1}{4}\left((e^x)^2+(e^{-x})^2+2e^xe^{-x}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2=\operatorname{ch}^2(x)\end{aligned}$$

Et donc puisque $\operatorname{ch}(x) \geq 0$, il vient $\operatorname{ch}(x)=\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}$.

(iv) On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\\ &=\operatorname{sh}\left(2\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sh}(x).\end{aligned}$$

Exercice 6.11 (★★)

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes $C_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(a+kb)$.

2. En déduire $\sum_{k=1}^{n} k\operatorname{ch}(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Fonctions circulaires

Exercice 6.12 (★★)

Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de $f : x \mapsto (1+\sin(x))^{\cos(x)}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $f(x)$ est définie si, et seulement si, $1+\sin(x) > 0$, soit $x \notin -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Et pour un tel x :

$$f'(x) = \left(-\sin(x)\ln(1+\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}\right) \times \exp\left(\cos(x)\ln(1+\sin(x))\right).$$

Exercice 6.13 (★)
Étudier et tracer l'allure du graphe de $f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Exercice 6.14 (★★)
Montrer que, pour tout réel x, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 6.15 (★★★★)
Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$.

Posons $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Il s'agit donc de déterminer le signe de $f(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos(x)) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin(x)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

Mais nous savons également que

$$\begin{aligned} \sin(x)+\cos(x) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin(x) + \sin\frac{\pi}{4}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Et de même,

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}$$

Mais puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$, alors $0 < \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi$ et $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\pi \leq \frac{\sin x+\cos x}{2}-\frac{\pi}{4} < 0$$

et

$$0 < \frac{\cos x-\sin x}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi$$

Donc les deux fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même de f. Étant continue, elle de signe constant (sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait entre un point où elle est positive et un point où elle est négative). Or :

$$f(0)=\sin(1)-\cos(0)=\sin(1)-1<0.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.

Fonctions circulaires réciproque

Exercice 6.16 (★)

Calculer les nombres suivants :

(i) $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

(ii) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

(iii) $\arccos\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$;

(iv) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$;

(v) $\arccos\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$;

(vi) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 6.17 (★★)

Calculer $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

Posons $y=\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)$, et remarquons que $0 \leq y < 2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}$. Calculons à l'aide des formules d'addition :

$$\tan(y)=\frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)+\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}{1-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{40}}=\frac{\frac{13}{40}}{\frac{39}{40}}=\frac{13}{39}=\tan\left(\arctan\left(\frac{13}{39}\right)\right).$$

Puisque tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, il suit que $y=\arctan\left(\frac{13}{39}\right)$.

Posons à présent $x=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+y$. De même, $0 \leq x < 2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}$, et :

$$\tan(x)=\frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan\left(\arctan\left(\frac{13}{39}\right)\right)}{1-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{13}{39}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{13}{39}}{1-\frac{13}{78}}=\frac{\frac{65}{78}}{\frac{65}{78}}=1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Puisque tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6.18 (★★)

Montrer les identités suivantes :

(i) $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$; (ii) $2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arccos\left(\frac{7}{25}\right)$; (iii) $\arccos\left(\frac{5}{13}\right) = 2\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 6.19 (★★)

Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens :

(i) $\cos(\arctan x)$;

(ii) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right)$;

(iii) $\sin(3\arctan x)$;

(iv) $\tan(\arcsin x)$;

(v) $\arccos(x) + \arccos(-x)$.

Exercice 6.20 (★★)

Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) - \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.

Exercice 6.21 (★★)

Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$.

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leq \theta < \pi$.
3. Montrer alors que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})$.

Exercice 6.22 (★★)

Soit $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Calculer la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4. Déterminer cette solution.

> 1. Puisque arcsin n'est définie que sur $[-1, 1]$, $f(x)$ est définie si, et seulement si, x et $2x$ sont dans $[-1, 1]$, ce qui est le cas si, et seulement si, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $\mathscr{D} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
> 2. Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.
> 3. La fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ car somme de deux fonctions strictement croissantes. On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Puisque f est continue, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Et donc l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution puisque $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. On notera dans la suite α cette solution.

Puisque $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante, on notera au passage que $\alpha \geq 0$.

4. L'égalité $f(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ se récrit $\arcsin(2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\alpha)$. D'où :

$$2\alpha = \sin(\arcsin(2\alpha)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\alpha)\right) = \cos(\arcsin(\alpha)) \underbrace{=}_{\cos(\arcsin(\alpha))\geq 0} \sqrt{1-\alpha^2}.$$

Et donc en élevant au carré, $4\alpha^2 = 1 - \alpha^2$, soit $\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Puisque $\alpha \geq 0$, on obtient finalement $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 6.23 (★★)

À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$;

(ii) $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(iii) $\forall x \in [0,1],\ \arcsin(\sqrt{x}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

Exercice 6.24 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme S_n en posant : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan x$.
2. En déduire la valeur de S_n. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. On propose deux méthodes.

- **Méthode 1 : par dérivation.**
  La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ (on notera pour cela que $x^2+x+1 \neq 0$ puisque son discriminant est strictement négatif), dérivable sur cet intervalle car composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}} - \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1} - \frac{1+x^2-1-(x+1)^2}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} \\ &= -\frac{2x+1}{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x+1} + \frac{2x+1}{2+2x^2+2x+2x^3+x^2+x^4} = 0 \end{aligned}$$

  Donc f est constante sur $\mathbb{R}_+$, égale à $f(0) = \arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(0) = 0$.
- **Méthode 2 : à l'aide des formules d'addition.**
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$, et posons $y = \arctan(x+1) - \arctan(x)$. Puisque $x \leq x+1$ et que arctan est croissante, $y \geq 0$. D'autre part, puisque $x \geq 0$, alors $y \leq \arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2}$.

Calculons :

$$\tan(y) = \frac{\tan(\arctan(x+1)) - \tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(x+1))\tan(\arctan(x))} = \frac{(x+1)-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{1+x+x^2}$$
$$= \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right).$$

Puisque $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective :

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x).$$

2. À l'aide de la question précédente :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k)) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$$

par télescopage. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.25 (★★)

1. Simplifier $\arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\text{th}(x) = \frac{5}{13}$.
3. En déduire que $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. Posons $f : x \mapsto \arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x))$.

Puisque th est à valeurs dans $]-1,1[$, et que arccos est dérivable sur $]-1,1[$, par somme et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est alors donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} - \frac{1-\text{th}^2(x)}{\sqrt{1-\text{th}^2(x)}} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \sqrt{1-\text{th}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} = 0.$$

Et par conséquent, f est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $f(0) = \arctan(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(\text{sh}(x)) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\text{th}(x)).$$

Autre méthode. Sans passer par les dérivées, une option était de calculer directement $\cos(\arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x)))$ à l'aide des formules d'addition. En effet, on sait calculer $\cos^2(\arctan(u)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(u))}$ et s'en servir pour déterminer les valeurs de $\cos(\arctan(u))$ et $\sin(\arctan(u))$.

Et de même, on sait calculer $\cos(\arccos(u)) = u$ et $\sin(\arccos(u)) = \sqrt{1-u^2}$.

Ici, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x))) = 0$.

Puisque par ailleurs, $\arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x)) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, et que sur cet intervalle, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ on en déduit que $\arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x)) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\text{th}(x) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x} + 5$$
$$\Leftrightarrow 8e^{2x} = 18 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

3. Calculons $\text{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$.

   Et donc, en appliquant la question 1. à $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.26 (★★★)

1. Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Calculer $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)$.
2. Calculer $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Cette formule permit à John Machin de calculer cent décimales de π en 1706.

1. Puisque $0 < x < y$, alors $0 < \frac{x}{y} < 1$ et $0 < \frac{y-x}{y+x} < 1$, d'où :

$$0 < \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

   D'autre part, posons $z = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$ et calculons à l'aide des formules d'addition de tan :

$$\begin{aligned}\tan(z) &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\right)}{1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{x}{y} + \frac{y-x}{y+x}}{1 - \frac{x(y-x)}{y(y+x)}} = \frac{x(y+x) + y(y-x)}{y(y+x) - x(y-x)} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

   Puisque tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, il suit que :

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. On va utiliser deux fois la formule d'addition de tan, en reprenant le raisonnement précédent.

   Posons $z = 2\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$. Remarquons que $0 < \frac{1}{5} < 1$, et donc par croissance stricte de arctan, $0 < z < \frac{\pi}{2}$. Calculons alors :

$$\tan(z) = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} = \tan\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right).$$

Puisque tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$:

$$z = \arctan\left(\frac{5}{12}\right).$$

On calcule de même $t = 2\arctan\left(\frac{5}{12}\right)$. On vérifie pour cela que $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on calcule :

$$\tan(t) = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Ainsi, toujours par bijectivité de tan de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, $t = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$ et donc :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

3. Par la formule du cours :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{119}{120}\right).$$

Et par la formule de la question 1. :

$$\arctan\left(\frac{119}{120}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{120-119}{120+119}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

D'où :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Exercice 6.27 (★★★)

Résoudre l'équation $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

Notons que la fonction $f : x \mapsto \arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions strictement croissantes.
Puisqu'elle est continue (car composée de fonctions qui le sont), et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Et donc il existe une et une seule solution α à l'équation de l'énoncé.

Puisque $f(0) = 0$, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que cette solution est positive strictement. De même, puisque $f(1) = \arctan(1) + \arctan(2) > 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha < 1$.

D'autre part, $0 < \arctan(\alpha-1) + \arctan(\alpha+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha) < \frac{\pi}{2}$ et :

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(\alpha-1) + \arctan(\alpha+1)) &= \frac{\tan\arctan(\alpha-1) + \tan\arctan(\alpha+1)}{1 - \tan(\arctan(\alpha-1))\tan(\arctan(\alpha+1))} \\ &= \frac{\alpha - 1 + \alpha + 1}{1 - (\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{2\alpha}{2-\alpha^2}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\arctan(\alpha-1) + \arctan(\alpha+1) = \arctan\left(\frac{2\alpha}{2-\alpha^2}\right)$. Et donc :

$$\arctan\left(\frac{2\alpha}{2-\alpha^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha) = \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Puisque arctan est bijective :

$$\frac{2\alpha}{2-\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}, \text{ d'où après calculs } \alpha^2 = \frac{2}{3}.$$

Puisque $\alpha > 0$, on obtient $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ainsi, l'unique solution de l'équation proposée est $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 6.28 (Oral Polytechnique - ★★★★)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \cdots + u_n)^2}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u_n}$.

Il est aisé de constater que (u_n) est strictement croissante, et donc en particulier à valeurs positives.
Comme indiqué, soit $\theta_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u_n} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$. Alors :

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta_{n+1}} - 1 = \frac{1 - \sin^2 \theta_{n+1}}{\sin^2 \theta_{n+1}} = \frac{\cos^2 \theta_{n+1}}{\sin^2 \theta_{n+1}} = \frac{1}{\tan^2 \theta_{n+1}}.$$

Soit encore (puisque tout est positif ici) $\tan \theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \cdots + u_n}$. Alors

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta_n} + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta_n} + \frac{1}{\sin \theta_n}} = \frac{\sin \theta_n}{\cos \theta_n + 1}.$$

Mais, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) + 1} = \frac{2 \sin t \cos t}{2\cos^2 t - 1 + 1} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$$

Et en particulier, $\frac{\sin \theta_n}{\cos \theta_n + 1} = \tan \frac{\theta_n}{2}$.
Et alors, en passant à l'arctangente, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ et donc $\theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.
On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} = 2^n \sin \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.
Mais la fonction sin étant dérivable en 0 , avec $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on a $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.
Et par conséquent,

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n \frac{\sin \frac{\theta_1}{2^{n-1}}}{\frac{\theta_1}{2^{n-1}}} \frac{\theta_1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\theta_1$$

Mais $\theta_1 = \arcsin \frac{1}{u_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
