TD 6

Fonctions usuelles

Logarithme, exponentielle, puissances

Exercice 6.1 (★★)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $2^{x^2} = 3^{x^3}$; (iii) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$; (v) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$;

(ii) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$; (iv) $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$; (vi) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, avec $a > 0, a \neq 1$.

Exercice 6.2 (★★)

Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathscr{S}_1) : \left\{ \begin{array}{l} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{array} \right. \qquad (\mathscr{S}_2) : \left\{ \begin{array}{c} x + y = 7 \\ \log(x) + \log(y) = 1 \end{array} \right. \qquad (\mathscr{S}_3) : \left\{ \begin{array}{c} xy = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{array} \right.$$

Exercice 6.3 (★★)

Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]0, 1[$.

Exercice 6.4 (★★)

Calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{e^x - 1}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;

(v) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ $(1 < a < b)$;

(vi) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 6.5 (★★)

On pose $f(x) = x^x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f, et étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
3. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
   Déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 6.6 (★ - Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Exercice 6.7 (★★)

1. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 6.8 (★★)

Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 6.9 (★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\operatorname{ch}(x) = 3$; | (ii) $7\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) = 9$; | (iii) $\operatorname{sh}(x) \leq 2$.

Exercice 6.10 (★)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(i) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$;

(ii) $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}$;

(iii) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$;

(iv) $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)^2}$.

Exercice 6.11 (★★)

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\operatorname{ch}(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Fonctions circulaires

Exercice 6.12 (★★)

Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de $f : x \mapsto (1+\sin x)^{\cos x}$.

Exercice 6.13 (★)

Étudier et tracer l'allure du graphe de $f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Exercice 6.14 (★★)

Montrer que, pour tout réel x, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 6.15 (★★★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$.

Fonctions circulaires réciproque

Exercice 6.16 (★)

Calculer les nombres suivants :

(i) $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

(ii) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

(iii) $\arccos\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$;

(iv) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$;

(v) $\arccos\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$;

(vi) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 6.17 (★★)

Calculer $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 6.18 (★★)

Montrer les identités suivantes :

(i) $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$; (ii) $2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arccos\left(\frac{7}{25}\right)$; (iii) $\arccos\left(\frac{5}{13}\right) = 2\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 6.19 (★★)

Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens :

(i) $\cos(\arctan x)$;

(ii) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right)$;

(iii) $\sin(3\arctan x)$;

(iv) $\tan(\arcsin x)$;

(v) $\arccos(x) + \arccos(-x)$.

Exercice 6.20 (★★)

Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) - \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.

Exercice 6.21 (★★)

Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$.

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leq \theta < \pi$.
3. Montrer alors que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})$.

Exercice 6.22 (★★)

Soit $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Calculer la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4. Déterminer cette solution.

Exercice 6.23 (★★)

À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)+\arctan(x)=\dfrac{\pi}{2}$;

(ii) $\forall x \in\,]-1,1[,\ \arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(iii) $\forall x \in [0,1],\ \arcsin(\sqrt{x}) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

Exercice 6.24 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme S_n en posant : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1)-\arctan x$.
2. En déduire la valeur de S_n. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6.25 (★★)

1. Simplifier $\arctan(\mathrm{sh}(x))+\arccos(\mathrm{th}(x))$ pour $x\in\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{th}(x)=\frac{5}{13}$.
3. En déduire que $\arctan\left(\frac{5}{12}\right)+\arccos\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.26 (★★★)

1. Soit x et y deux réels tels que $0<x<y$. Calculer $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)+\arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)$.
2. Calculer $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Cette formule permit à John Machin de calculer cent décimales de π en 1706.

Exercice 6.27 (★★★)

Résoudre l'équation $\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.28 (Oral Polytechnique - ★★★★)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geq 0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{1+(u_0+\cdots+u_n)^2}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{u_n}$.
