TD 8

Calculs de primitives et d'intégrales

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 8.1 (★)

À l'aide d'un calcul de dérivée, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice 8.2 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$f_1 : \quad x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$f_2 : \quad x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$

$f_3 : \quad x \mapsto \sqrt{x}(1-x)$

$f_4 : \quad x \mapsto \sqrt{x^4+x^2}$

$f_5 : \quad x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

$f_6 : \quad x \mapsto \sqrt{\dfrac{\arcsin(x)}{1-x^2}}$

$f_7 : \quad x \mapsto \cos^3(x)$

$f_8 : \quad x \mapsto \tan^2(x)$

$f_9 : \quad x \mapsto e^{-x}\sin(x)^2$

$f_{10} : \quad x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$

$f_{11} : \quad x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$

$f_{12} : \quad x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$

$f_{13} : \quad x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

$f_{14} : \quad x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^6}$

Exercice 8.3 (★★)

Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t$.

> Notons tout de suite que si $p=0$ ou $q=0$, alors $I_{p,q}=0$.
> Si $p=q$, alors $I_{p,q} = \int_0^{2\pi}\sin^2(pt)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2pt))dt = \frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin(2pt)}{2p}\right]_0^{2\pi} = \pi$.
> De même, si $p=-q$, alors $I_{p,q} = -I_{p,p} = -\pi$.
> Si $p \neq \pm q$, alors à l'aide de la formule de trigonométrie $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$:
>
> $$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((p-q)t)-\cos((p+q)t))dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q} - \frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Exercice 8.4 (★★★)

Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$. On précisera le domaine de validité.

> Notons $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
>
> $$\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$
>
> et $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ si, et seulement si, $x-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{3\pi}{4}\,[\pi]$.
> Cherchons une primitive F et G de f et de g respectivement, par exemple sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ sur lequel elles sont continues (quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur

ne s'annule pas). Pour tout $x \in I$:

$$F(x) + G(x) = \int^x f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \int^x 1\,\mathrm{d}t = x.$$

D'autre part :

$$G(x) - F(x) = \int^x \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(|\cos(x) + \sin(x)|\right).$$

Par somme, $G(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \ln\left(|\cos(x) + \sin(x)|\right)\right)$ et par différence, $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \ln\left(|\cos(x) + \sin(x)|\right)\right)$.

Intégration par parties

Exercice 8.5 (★★)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

$$I_1 = \int_0^\pi t e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

$$I_2 = \int_1^e t \ln(t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$I_3 = \int_0^1 t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$$

$$I_5 = \int_{-1}^1 \ln(t^2 + \rho^2)\,\mathrm{d}t$$ où $\rho > 0$

$$I_6 = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I_8 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

$$I_9 = \int_0^{1/2} e^{\arcsin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.6 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$f_1 : \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$f_2 : \quad x \mapsto x^2 \sin(x)^3$

$f_3 : \quad x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

$f_4 : \quad x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Primitives de fractions rationnelles

Exercice 8.7 (★★)

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x}{x^3 - x}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)^2}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$

(v) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2 - 4)^2}$

(vi) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$

(vii) $x \mapsto \dfrac{3x + 2}{x^2 + x + 1}$

(viii) $x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 3}$

(ix) $x \mapsto \dfrac{4x^2}{x^4 - 1}$

(x) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3 + 1}$

(xi) $x \mapsto \dfrac{1}{x^4 + 1}$

(xii) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2 + 1)^2}$

Exercice 8.8 (★★★)
Dans cet exercice, nous allons voir sur des exemples comment intégrer des éléments simples de seconde espèce du type $x \mapsto \dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$ où $n \geq 2$.

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$ avec $n \geq 2$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \tan(y)$, calculer $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Avec le même changement de variable, calculer $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$.
4. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, exprimer $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2}\mathrm{d}x$ en fonction de I_2 et J_2, et en déduire sa valeur.

Exercice 8.9 (★★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Montrer que :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + K \quad (\text{où } K \in \mathbb{C}).$$

Changement de variables

Exercice 8.10 (★★)
Déterminer des primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

(i) $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$, $u = \dfrac{1}{t}$

(ii) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$, $u = \sqrt{1+t}$

(iii) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$, $t = u^2$

(iv) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec l'un ou l'autre des changements $t = \frac{1}{u}$, $t = \tan(v)$ et $t = \mathrm{sh}(w)$

(v) $t \mapsto \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, $t = \cos(u)$

Exercice 8.11 (★★)
Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$, $x = e^t$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$, $x = \sin(t)$

$I_3 = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, $x = \frac{1}{t}$

$I_4 = \displaystyle\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(2\theta)\sqrt{\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$, $t = \cos(\theta)$

$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$, $t = \sqrt{x-1}$

$I_6 = \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$, $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$

Exercice 8.12 (★★)
On chercher à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{(\sin(t)-2)(2+\sin(t)-\cos(t)^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que l'on peut écrire $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta R(u)\,\mathrm{d}u$ où R est une fraction rationnelle.
2. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 8.13 (★★)

En posant $t = \tan(x/2)$, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)} \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin(x)} \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}}$$

Et sans indications ?

Exercice 8.14 (★★★)

Déterminer une primitive ou l'intégrale des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^4}$

(v) $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$

(vi) $x \mapsto x\arcsin(x)$

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)^3}$

(viii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln(x)^2}}$

(ix) $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.15 (★★★★)

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^{2026}(x)}{\sin^{2026}(x)+\cos^{2026}(x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 8.16 (★★★★ - Oral Mines Ponts 2010)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$.

> Peut-être l'avez-vous remarqué, mais pour les fonctions faisant apparaître $\sqrt{1-x^2}$, le changement de variable $x = \cos t$ est potentiellement intéressant, puisqu'il permet de faire apparaître $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t}$ en utilisant la relation $\cos^2 t + \sin^2 = 1$.
> Puisqu'on a de la même manière $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, si on pose $x = \mathrm{ch}\, t$, alors $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\mathrm{sh}^2 t}$.
> Essayons donc de calculer une primitive de $f : x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$ à l'aide du changement de variable $x = \pm\mathrm{ch} t$.
> Notons que f n'est définie que sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. On a alors
>
> $$\int \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 \mathrm{d}x = \int (\mathrm{ch}\, t + |\,\mathrm{sh}\, t|)^3\, \mathrm{sh}\, t\, \mathrm{d}t.$$
>
> - Sur $[1,+\infty[$. Notons que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$. Notons ch^{-1} sa bijection réciproque. On a alors, pour $u \geq 1$, avec le changement de variable $x = \mathrm{ch}\, t$.

$$\begin{aligned}\int^u \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 dt &= \int^{\operatorname{ch}^{-1}u} (\operatorname{ch} t + |\operatorname{sh} t|)^3 \operatorname{sh} t dt \\ &= \int^{\operatorname{ch}^{-1}u} e^{3t}\operatorname{sh}(t)dt = \frac{1}{2}\int \left(e^{4t}-e^{2t}\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{8}e^{4t}-\frac{1}{4}e^{2t}\right]^{\operatorname{ch}^{-1}(u)}.\end{aligned}$$

Mais $e^{4\operatorname{ch}^{-1}(u)} = \left(\operatorname{ch}\left(\operatorname{ch}^{-1}(u)\right)+\operatorname{sh}\left(\operatorname{ch}^{-1}(u)\right)\right)^4 = \left(u+\sqrt{u^2-1}\right)^4$. Et donc une primitive de f sur $[1,+\infty[$ est $x\mapsto \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$.

- Sur $]-\infty,-1]$, la principale différence viendra du fait que $\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} = |\operatorname{sh} t| = -\operatorname{sh} t$. On utilise alors le fait que $t\mapsto -\operatorname{ch}(t)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty,-1]$, et le même type de calculs nous mène à une primitive de f de la forme

$$x\mapsto \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2.$$

Exercice 8.17 (★★★★ - Oral Polytechnique)

Calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(x))\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de $J=\int_0^1\frac{\arctan(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Notons I l'intégrale à calculer, et réalisons le changement de variable $t=\frac{\pi}{4}-x$, qui laisse invariantes les bornes de l'intégrale.
On a alors $\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t}=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$.
Et par conséquent,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\frac{\pi\ln 2}{4}-I.$$

Et donc $I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Pour le calcul de J, procédons par intégration par parties :

$$J=\int_0^1\frac{\arctan t}{1+t}dt=[\ln(1+t)\arctan(t)]_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

Un changement de variable $u=\arctan t$ dans cette intégrale nous donne alors $t=\tan u\Leftrightarrow dt=(1+\tan^2 u)\,du\Leftrightarrow du=\frac{dt}{1+t^2}$. Et donc

$$\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan u)du=I$$

Il vient donc $J=\frac{\pi\ln 2}{4}-I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Suites d'intégrales

Exercice 8.18 (★★)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $I_n=\int_1^e(\ln(x))^n\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(n \times I_n)$.

Exercice 8.19 (★★)
On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)\mathrm{d}x$$

1. Établir une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n).
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 8.20 (★★)
On considère deux entiers naturels p et q et on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$ lorsque $q \geq 1$.
2. En déduire $I(p,q)$ en fonction de $p!$, $q!$ et $(p+q+1)!$.
3. En déduire une expression factorisée de $\frac{1}{p+1}\binom{q}{0} - \frac{1}{p+2}\binom{q}{1} + \frac{1}{p+3}\binom{q}{2} - \cdots + \frac{(-1)^q}{p+q+1}\binom{q}{q}$.
