TD 8

Calculs de primitives et d'intégrales

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 8.1 (★)

À l'aide d'un calcul de dérivée, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice 8.2 (★★)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}(1-x)$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{x^4+x^2}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

$f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\arcsin(x)}{1-x^2}}$

$f_7 : x \mapsto \cos^3(x)$

$f_8 : x \mapsto \tan^2(x)$

$f_9 : x \mapsto e^{-x}\sin(x)^2$

$f_{10} : x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$

$f_{11} : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$

$f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$

$f_{13} : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

$f_{14} : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^6}$

Exercice 8.3 (★★)

Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.4 (★★★)

Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$. On précisera le domaine de validité.

Intégration par parties

Exercice 8.5 (★★)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} te^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$

$I_2 = \displaystyle\int_1^{e} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$

$I_3 = \displaystyle\int_0^{1} t^3e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

$I_4 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} t^2\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

$I_5 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$ où $\rho > 0$

$I_6 = \displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

$I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$

$I_8 = \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

$I_9 = \displaystyle\int_0^{1/2} e^{\arcsin(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.6 (★★)
Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$f_1 : \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$f_2 : \quad x \mapsto x^2 \sin(x)^3$

$f_3 : \quad x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

$f_4 : \quad x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Primitives de fractions rationnelles

Exercice 8.7 (★★)
Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x}{x^3-x}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)^2}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$

(v) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

(vi) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

(vii) $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$

(viii) $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

(ix) $x \mapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$

(x) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$

(xi) $x \mapsto \dfrac{1}{x^4+1}$

(xii) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$

Exercice 8.8 (★★★)
Dans cet exercice, nous allons voir sur des exemples comment intégrer des éléments simples de seconde espèce du type $x \mapsto \dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$ où $n \geq 2$.

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$ avec $n \geq 2$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \tan(y)$, calculer $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Avec le même changement de variable, calculer $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$.
4. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, exprimer $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2}\mathrm{d}x$ en fonction de I_2 et J_2, et en déduire sa valeur.

Exercice 8.9 (★★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Montrer que :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + K \quad (\text{où } K \in \mathbb{C}).$$

Changement de variables

Exercice 8.10 (★★)

Déterminer des primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

(i) $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$, $u = \dfrac{1}{t}$

(ii) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$, $u = \sqrt{1+t}$

(iii) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$, $t = u^2$

(iv) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec l'un ou l'autre des changements $t = \frac{1}{u}$, $t = \tan(v)$ et $t = \operatorname{sh}(w)$

(v) $t \mapsto \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, $t = \cos(u)$

Exercice 8.11 (★★)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$, $x = e^t$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$, $x = \sin(t)$

$I_3 = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, $x = \frac{1}{t}$

$I_4 = \displaystyle\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(2\theta)\sqrt{\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$, $t = \cos(\theta)$

$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$, $t = \sqrt{x-1}$

$I_6 = \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$, $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$

Exercice 8.12 (★★)

On chercher à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{(\sin(t)-2)(2+\sin(t)-\cos(t)^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que l'on peut écrire $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta R(u)\,\mathrm{d}u$ où R est une fraction rationnelle.
2. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 8.13 (★★)

En posant $t = \tan(x/2)$, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)}$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin(x)}$

$I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}}$

Et sans indications ?

Exercice 8.14 (★★★)

Déterminer une primitive ou l'intégrale des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^4}$

(v) $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$

(vi) $x \mapsto x\arcsin(x)$

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)^3}$

(viii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln(x)^2}}$	(ix) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.15 (★★★★)

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^{2026}(x)}{\sin^{2026}(x)+\cos^{2026}(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 8.16 (★★★★ - Oral Mines Ponts 2010)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$.

Exercice 8.17 (★★★★ - Oral Polytechnique)

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Suites d'intégrales

Exercice 8.18 (★★)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(n \times I_n)$.

Exercice 8.19 (★★)

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)\mathrm{d}x$$

1. Établir une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n).
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 8.20 (★★)

On considère deux entiers naturels p et q et on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$ lorsque $q \geq 1$.
2. En déduire $I(p,q)$ en fonction de $p!$, $q!$ et $(p+q+1)!$.
3. En déduire une expression factorisée de $\frac{1}{p+1}\binom{q}{0} - \frac{1}{p+2}\binom{q}{1} + \frac{1}{p+3}\binom{q}{2} - \cdots + \frac{(-1)^q}{p+q+1}\binom{q}{q}$.
