

Dédution naturelle

1	Séquent en déduction naturelle	2
2	Preuve en déduction naturelle	2
2.1	Règle d'inférence en déduction naturelle	2
2.2	Arbre de preuve	3
2.3	Hypothèse en déduction naturelle	4
2.4	Différentes présentations des preuves	4
2.5	Les règles d'inférence	5
2.6	Définition inductive de la dérivation	6
3	Correction de la déduction naturelle	7
3.1	Théorème	7
3.2	Cas de la déduction naturelle	7
4	Exercices	7

Introduction

L'objectif est de déterminer si une formule propositionnelle F est :

- valide (c'est-à-dire une tautologie, c'est-à-dire toute valuation en est un modèle),
- satisfiable (c'est-à-dire admet un modèle),
- insatisfiable (c'est-à-dire une antilogie, c'est-à-dire n'admet aucun modèle),
- conséquence logique d'un ensemble de formules $\Gamma = \{H_1, \dots, H_n\}$ (c'est-à-dire $\Gamma \models F$, c'est-à-dire la formule $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow F$ est valide, c'est-à-dire tout modèle de $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ est un modèle de F).

En logique des propositions, les notions de modèle et de vérité permettent de vérifier aisément (et en temps fini) si une formule propositionnelle donnée est valide, satisfiable, insatisfiable... Cela présente cependant deux inconvénients :

- La complexité exponentielle : une formule propositionnelle qui fait apparaître n variables propositionnelles, n appartenant à $\mathbb{N}$, amène une table de vérité contenant 2^n lignes.
- Le lien très faible avec une preuve mathématique : quand un mathématicien veut montrer un théorème, il ne commence pas par énumérer toutes les possibilités et vérifier que son énoncé reste vrai pour n'importe quel choix.

On adopte ici un autre point de vu, avec la méthode de démonstration universellement acceptée en mathématiques, c'est-à-dire la **méthode axiomatique**. Nous allons nous baser sur ce mode de démonstration pour bâtir le concept de **système de preuve**.

Un ensemble (éventuellement vide) de vérités élémentaires appelées **axiomes** est initialement établi et accepté comme vrai sans aucune preuve. En général, sont choisis comme axiomes, des énoncés qui paraissent évidents et consensuels (comme par exemple "deux droites strictement parallèles ne se rencontrent en aucun point").

A partir des axiomes, on s'autorise à déduire des théorèmes en appliquant un nombre restreint de formes de raisonnements universellement acceptées appelées **règles d'inférence** (ou **de déduction**).

Le choix d'un ensemble d'axiomes et de règles d'inférence est appelé un **système de preuve** (ou **de déduction**).

La **dédution naturelle** est un système de preuve permettant de faire un calcul plus efficace que l'étude de la table de vérité pour démontrer une formule propositionnelle.

1 Séquent en déduction naturelle

Définition.

Un **séquent** est une structure composée :

- d'un **contexte** décrit par un ensemble (éventuellement vide) de formules propositionnelles $\Gamma = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, n appartenant à $\mathbb{N}$, appelées **prémisse** ou **hypothèse**,
- d'une **conclusion** décrite par une formule propositionnelle C .

Il est noté $H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$ ou plus simplement $\Gamma \vdash C$.

Remarques.

1. Le séquent $\Gamma \vdash C$ peut se lire "on en déduit C à partir de Γ ".
2. Dans le cas particulier où Γ est vide, nous écrivons : $\vdash C$.

Exemples.

- Le *modus ponens* : $F, F \rightarrow G \vdash G$,
- Le syllogisme barbara : $F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$.

2 Preuve en déduction naturelle

2.1 Règle d'inférence en déduction naturelle

Définition.

Une **règle d'inférence** (ou **de déduction**) R est définie par la donnée :

- d'un ensemble éventuellement vide de séquents (hypothèses) $\Gamma_1 \vdash H_1, \Gamma_2 \vdash H_2, \dots, \Gamma_n \vdash H_n$, n appartenant à $\mathbb{N}$,
- d'un séquent (conclusion) $\Gamma \vdash C$.

On l'écrit sous la forme (syntaxe de Gentzen) :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash H_1 \quad \Gamma_2 \vdash H_2 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash H_n}{\Gamma \vdash C} (R).$$

Remarque. Dans le cas particulier où $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_n = \Gamma$, la règle R peut se noter :

$$\frac{H_1 \quad H_2 \quad \dots \quad H_n}{C} (R).$$

Définition.

Une règle d'inférence R dont l'ensemble des séquents hypothèses est vide est appelé un **axiome**.

Exemples.

- La règle du *modus ponens* : $\frac{F, F \rightarrow G}{G} (\rightarrow_e)$.
- La règle du syllogisme barbara : $\frac{F \rightarrow G, G \rightarrow H}{F \rightarrow H} (aaa)$.

Définition.

Une règle d'inférence

$$\frac{\Gamma_1 \vdash H_1 \quad \Gamma_2 \vdash H_2 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash H_n}{\Gamma \vdash C} (R)$$

est dite **correcte** si seulement si

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Gamma_k \models H_k) \text{ entraîne } (\Gamma \models C).$$

Exercice. Soient F et G deux formules propositionnelles. Montrer que la règle $\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F} (\wedge_e^1)$ est correcte.

2.2 Arbre de preuve**Définition.**

Étant donné un séquent $\Gamma \vdash C$, on appelle **preuve** (ou **dérivation formelle**) du séquent $\Gamma \vdash C$, la suite des règles d'inférence qui, à partir d'axiomes, nous conduisent au séquent $\Gamma \vdash C$.

Le séquent $\Gamma \vdash C$ est alors dit **prouvable** (ou **démontrable**).

Remarque.

- Pour un être humain, une preuve est une suite d'étapes dont nous sommes convaincus que nous pouvons passer de l'une à la suivante.
- Pour un ordinateur, une preuve est une suite d'étapes telle qu'une règle purement syntaxique permet de passer de l'une à la suivante. La preuve est un calcul !

Définition.

Étant donné un séquent $\Gamma \vdash C$ prouvable, la preuve se présentera sous forme d'un **arbre de preuve** dont :

- la racine (en bas) est étiquetée par le séquent $\Gamma \vdash C$,
- les feuilles (en haut) sont des axiomes ou des hypothèses,
- chaque noeud interne est étiqueté par une règle d'inférence.

$$\frac{\frac{\text{feuille} \dots \text{feuille}}{\text{noeud interne}}(R_1) \dots \frac{\frac{\text{feuille} \dots \text{feuille}}{\text{noeud interne}}(R'_1) \dots \frac{\text{feuille} \dots \text{feuille}}{\text{noeud interne}}(R'_2)}{\text{noeud interne}}(R_2)}{\Gamma \vdash C}$$

Définition.

Une formule propositionnelle C est dite **prouvable** si et seulement si le séquent $\vdash C$ est prouvable.

2.3 Hypothèse en déduction naturelle**Raisonnements sous des hypothèses**

Une démonstration de la formule G sous l'hypothèse F a la forme :

$$\frac{F}{\vdots} \overline{G}$$

où les points de suspension verticaux représentent un arbre de preuve de conclusion G et dont certaines feuilles comportent l'hypothèse F .

Hypothèse déchargée

Il existe aussi des règles où une hypothèse est déchargée, c'est-à-dire que l'hypothèse n'est plus supposée à partir de l'application de la règle. Par exemple, à partir d'une démonstration de G sous l'hypothèse F , nous pouvons construire une démonstration de l'implication $F \rightarrow G$:

$$\frac{\frac{[F]}{\vdots} \overline{G}}{F \rightarrow G}$$

et les crochets $[F]$ signifient que l'hypothèse F est déchargée.

2.4 Différentes présentations des preuves

Il existe plusieurs présentations des règles et des démonstrations en déduction naturelle.

La présentation historique "à la Prawitz"

La présentation historique "à la Prawitz" est une présentation en arbre de preuve où les hypothèses et/ou axiomes sont aux feuilles.

Exemple. Démontrons que : $\vdash F \wedge G \rightarrow G \wedge F$.

$$\frac{\frac{\frac{[F \wedge G]}{G}(\wedge_e^2) \quad \frac{[F \wedge G]}{F}(\wedge_e^1)}{G \wedge F}(\wedge_i)}{F \wedge G \rightarrow G \wedge F}(\rightarrow_i)$$

Une deuxième présentation

Une deuxième présentation est une présentation en arbre où les feuilles sont des axiomes (pas d'hypothèses) et les noeuds internes étiquetés par des séquents de la forme $\Gamma \vdash C$. Cette présentation, bien que moins intuitive, est techniquement la plus adaptée à démontrer les propriétés de la déduction naturelle.

Exemple. Démontrons que $\vdash F \wedge G \rightarrow G \wedge F$.

$$\frac{\frac{\frac{}{F \wedge G \vdash F \wedge G}^{(ax)}}{F \wedge G \vdash G}^{(\wedge_e)} \quad \frac{\frac{}{F \wedge G \vdash F \wedge G}^{(ax)}}{F \wedge G \vdash F}^{(\wedge_e)}}{F \wedge G \vdash G \wedge F}^{(\wedge_i)} \quad \frac{}{\vdash F \wedge G \rightarrow G \wedge F}^{(\rightarrow_i)}$$

La présentation "à la Fitch"

La présentation "à la Fitch" est une présentation où chaque ligne de la démonstration contient un jugement numéroté, le texte est indenté à chaque fois que nous chargeons une hypothèse.

Exemple. Démontrons que $\vdash F \wedge G \rightarrow G \wedge F$.

$$\begin{array}{l} 1 : F \wedge G \\ 2 : F \\ 3 : G \\ 4 : G \wedge F \\ 5 : F \wedge G \rightarrow G \wedge F \end{array}$$

2.5 Les règles d'inférence

Les règles d'inférence pour la déduction naturelle reposent sur les 4 connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ et pour chacun, une règle d'introduction et une règle d'élimination.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}^{(ax)}$$

- Affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}^{(aff)}$$

- Implication :

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \rightarrow G}^{(\rightarrow_i)}, \quad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G}^{(\rightarrow_e)}.$$

- Conjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}^{(\wedge_i)}, \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}^{(\wedge_e^1)}, \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}^{(\wedge_e^2)}.$$

- Disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}^{(\vee_i^1)}, \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}^{(\vee_i^2)}, \quad \frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}^{(\vee_e)}.$$

- Négation :

$$\frac{\Gamma, F \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg F}^{(\neg_i)}, \quad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash \perp}^{(\neg_e)}, \quad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \perp}{\Gamma \vdash F}^{(\neg_e)}.$$

Exercice. Montrer que : $F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$.

2.6 Définition inductive de la dérivation

Muni de toutes ses règles, il est maintenant possible de proposer une définition inductive de la dérivation :

- Toute formule hypothèse et conclusion d'une preuve triviale est une dérivation.
- Si D est une dérivation de conclusion $F_1 \wedge F_2$, alors

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ D \\ \vdots \end{array}}{\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}(\wedge_e^1)} \quad \text{et} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ D \\ \vdots \end{array}}{\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}(\wedge_e^2)}$$

sont des dérivations.

- Si D_1 et D_2 sont deux dérivations de conclusions respectives F_1 et F_2 , alors

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ D_1 \\ \vdots \end{array}}{F_1} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ D_2 \\ \vdots \end{array}}{F_2}}{F_1 \wedge F_2}(\wedge_i)$$

est une dérivation.

- On procède de même pour les autres règles d'introduction et d'élimination.

3 Correction de la déduction naturelle

3.1 Théorème

Définition.

Étant donné un système de preuve, nous dirons qu'une formule propositionnelle F est un **théorème** si :

- soit elle est un axiome,
- soit elle est la conséquence d'une règle d'inférence dont les prémisses sont elles mêmes des théorèmes.

Définition.

Nous dirons qu'un système de preuve est **correct** si tout théorème est une tautologie, et **complet** si toute tautologie est un théorème.

Remarques.

1. Notons que le choix des axiomes et des règles n'est pas unique, et plusieurs systèmes de preuve différents vont aboutir aux mêmes théorèmes ou à des théorèmes différents.
2. La déduction naturelle est un système de preuve particulier, basée sur la conséquence logique $\models$ de la logique des propositions. Forme-t-elle un système de preuve correct ? complet ?

Autrement dit, étant donnée une formule propositionnelle C , a-t-on l'équivalence :

$$(C \text{ prouvable}) \Leftrightarrow (C \text{ valide}).$$

3.2 Cas de la déduction naturelle

Propriété 1 (des règles d'inférence)

Les règles d'inférence pour la déduction naturelle sont correctes.

Preuve. Nous avons démontré précédemment que la règle d'inférence $\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F} (\wedge_e^1)$ est correcte. Il faudrait faire le même raisonnement pour toutes les autres règles d'inférence... $\square$

On en déduit (par induction structurelle) le :

Théorème 2 (Correction de la déduction naturelle)

La déduction naturelle pour le calcul propositionnel est **correcte** et **complète**, c'est-à-dire :

- un séquent $\Gamma \vdash C$ est prouvable en déduction naturelle si et seulement si il est correct, c'est-à-dire $\Gamma \models C$,
- en particulier, C est prouvable si et seulement si C est valide, ou encore C est un théorème si et seulement si C est une tautologie.

4 Exercices

Exercice 1 (★)

Soit F une formule propositionnelle. Démontrer la règle dérivée suivante :

$$\frac{\Gamma, \neg F \vdash F}{\Gamma \vdash F}.$$

Exercice 2 (★★)

Soient F_1, F_2, F_3, F_4 des formules propositionnelles. Donner une dérivation des formules suivantes :

1. $\vdash F_1 \rightarrow ((F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow F_2)$.
 2. $\vdash (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow \neg(F_1 \wedge \neg F_2)$.
 3. $\vdash (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow ((F_1 \wedge F_3) \rightarrow F_2)$.
 4. $\vdash ((F_1 \vee F_3) \rightarrow F_2) \rightarrow ((F_4 \rightarrow F_1) \rightarrow (F_4 \rightarrow F_2))$.
 5. $\vdash (\neg F_1 \rightarrow F_1) \rightarrow F_1$.
-

Exercice 3 (★★)

Soient F_1, F_2, F_3 des formules propositionnelles. Montrer, en construisant l'arbre de preuve, que :

1. $F_1, F_2, F_3 \vdash (F_1 \wedge F_2) \wedge F_3$.
 2. $F_1, F_2 \vdash (F_3 \rightarrow (F_2 \wedge F_3))$.
 3. $\vdash (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow \neg(F_1 \wedge \neg F_2)$.
 4. $(F_1 \rightarrow F_2) \vdash (\neg F_2 \rightarrow \neg F_1)$.
-

Exercice 4 (★★)

Soient F_1 et F_2 deux formules propositionnelles. En déduction naturelle, on dit que F_1 est équivalent à F_2 , et on note $F_1 \sim F_2$, si et seulement si $\vdash F_1 \rightarrow F_2$ et $\vdash F_2 \rightarrow F_1$ sont dérivables. On se propose de montrer que $F_1 \rightarrow F_2 \sim \neg F_1 \vee F_2$ en utilisant cette définition.

1. Écrire les séquents correspondants.
 2. Pour montrer $\vdash (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow (\neg F_1 \vee F_2)$, il suffit de montrer $F_1 \rightarrow F_2 \vdash \neg F_1 \vee F_2$. Si F_1 est vraie, alors de $F_1 \rightarrow F_2$ on déduit F_2 et donc $\neg F_1 \vee F_2$. Sinon, $\neg F_1$ est vraie et alors $\neg F_1 \vee F_2$.
En utilisant $\vdash F_1 \vee \neg F_1$, écrire la dérivation en déduction naturelle du séquent $\vdash (F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow (\neg F_1 \vee F_2)$, correspondant au raisonnement précédent.
 3. Proposer une dérivation de $\vdash (\neg F_1 \vee F_2) \rightarrow (F_1 \rightarrow F_2)$.
-

Exercice 5 (★★)

Soient F_1, F_2, F_3 des formules propositionnelles. Construire des arbres de dérivation pour les jugements suivants (sans raisonnement par l'absurde) :

1. $(F_1 \wedge F_2) \rightarrow F_3 \vdash F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow F_3)$.
 2. $F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow F_3), F_2 \rightarrow F_1 \vdash F_2 \rightarrow F_3$.
 3. $F_1 \rightarrow \neg F_1 \vdash \neg F_1$.
-

Exercice 6 (★★)

Soit F une formule propositionnelle.

1. Donner une dérivation de $\neg \neg F, F \vee \neg F \vdash F$, sans utiliser la règle de raisonnement par l'absurde.
 2. Donner une dérivation de $\neg \neg F \vdash F$.
-

Exercice 7 (★★)

Soient F_1 et F_2 des formules propositionnelles. Démontrer que $\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$ sont prouvablement équivalents, c'est-à-dire que de chacun on peut dériver l'autre.

Indication : l'une des directions est plus facile que l'autre. On pourra admettre le tiers exclu, c'est-à-dire la prouvabilité du séquent $\Gamma \vdash F \vee \neg F$ pour toute formule F .
