Correction du l'Interrogation 5 du Lundi 19 Janvier

Exercice 1 (Du cours)

1. (a) Démonstration faite en cours.
   (b) Montrons que $(L_2.L_1)^*.L_2 = L_2.(L_1.L_2)^*$ par équivalence :

$$\begin{aligned} u \in (L_2.L_1)^*.L_2 &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, u_i \in L_2, v_j \in L_1,\ u = (u_1 v_1 \dots u_n v_n) u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, u_i \in L_2, v_j \in L_1,\ u = u_1 (v_1 \dots u_n v_n u_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow u \in L_2.(L_1.L_2)^*. \end{aligned}$$

2. (a) $(a+b)^* a (a+b)^*$.
   (b) $a^* b a^* b a^* b a^*$.
   (c) $(ab+b+c)^* c$.
   (d) $(a+c)^*(\varepsilon + b((a+c)(a+c)b)^*)(a+c)^*$.
3. (a) $P(L_1) = \{a,b,c\}$, $S(L_1) = \{c\}$, $F(L_1) = \{ab, ba, aa, bb, ac, bc\}$ et $N(L_1) = \{ca, cb, cc\}$.
   On a l'égalité $L_1 \backslash \{\varepsilon\} = (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \backslash (\Sigma^* N \Sigma^*)$. En effet :
   $\subset$ Toujours vraie.
   $\supset$ Soit $u = x_1 \dots x_n \in (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \backslash (\Sigma^* N \Sigma^*)$. Comme $u \in \Sigma^* S$, $x_n = c$.
   Soit $i \in [\![1, n]\!]$ le plus petit indice tel que $x_i = c$. Comme on ne peut pas avoir de facteur ca, cb et cc dans u, on a nécessairement $i = n$ et donc les $n-1$ premières lettres de u sont des a ou des b.
   Donc $u \in \mathscr{L}((a+b)^* c) = L_1$.
   Donc L_1 est un langage local.
   (b) $P(L_2) = \{a\}$, $S(L_2) = \{a, b\}$, $F(L_2) = \{aa, ab, ba\}$ et $N(L_2) = \{bb\}$.
   Le mot aba est dans $(P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \backslash (\Sigma^* N \Sigma^*)$ mais pas dans L_2.
   Donc L_2 n'est pas un langage local.
4. Démonstration faite en cours.

Exercice 2 (Lemme d'Arden)

1. (a) $AA^*B \cup B = (AA^* \cup \{\varepsilon\})B = (A^+ \cup \{\varepsilon\})B = A^*B$.
   Donc $L = A^*B$ est bien solution de l'équation (E).
   (b) Soit L une solution de (E). On montre par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$L = A^{n+1} L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B \right).$$

   Ini. Par hypothèse, $L = (A.L) \cup B = A^{0+1} L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{0} A^k B \right)$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} L &= A^{n+1}L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B\right) \\ &= A^{n+1}((A.L) \cup B) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B\right) \\ &= A^{n+1}AL \cup A^{n+1}B \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B\right) \\ &= A^{n+2}L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A^k B\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, la propriété est bien démontrée pour tout entier naturel n.

(c) Soit L une solution de (E). On montre alors que $L = A^*B$ par double inclusion.

$\supset$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L = A^{n+1}L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B\right)$ donc $A^n B \subset L$.

Donc $A^*B = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A^n\right) B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A^n B \subset L$.

$\subset$ Soit $u \in L$ de longueur n. Comme $L = A^{n+1}L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B\right)$ et $u \notin A^{n+1}L$ (car $\varepsilon \notin A$), $u \in \bigcup_{k=0}^{n} A^k B$ donc $u \in A^*B$.

Ainsi, $L = A^*B$ est bien l'unique solution de l'équation $L = (A.L) \cup B$.

2. (a) Par double inclusion :

$\supset$ Les mots des langages $\{a\}.L$ et $\{b\}.L'$ ont un nombre impair de a donc $\{a\}.L \cup \{b\}.L' \subset L'$.

$\subset$ Soit $u \in L'$. Alors nécessairement $u \neq \varepsilon$ (puisque le mot u contient au moins un a). Posons $u = x_1 \dots x_n$ et faisons une disjonction de cas sur x_1 :

— Si $x_1 = a$, alors $u = ax_2 \dots x_n$ et comme u possède un nombre impair de a, $x_2 \dots x_n \in L$. Donc $u \in \{a\}.L$.

— Si $x_1 = b$, alors $u = bx_2 \dots x_n$ et comme u possède un nombre impair de a, $x_2 \dots x_n \in L'$. Donc $u \in \{b\}.L'$.

Donc $u \in \{a\}.L \cup \{b\}.L'$.

On a donc bien l'égalité $L' = \{a\}.L \cup \{b\}.L'$.

(b) On a $L' = \underbrace{\{b\}}_{=A}.L' \cup \underbrace{\{a\}.L}_{=B}$ et $\varepsilon \notin A$.

D'après le lemme d'Arden, $L' = \{b\}^*.\{a\}.L$.

(c) Avec un raisonnement similaire à la question 2.(a), on montre que :

$$L = \{a\}.L' \cup \{b\}.L \cup \{\varepsilon\}.$$

(d) Avec les deux questions précédentes, on a :

$$L = \{a\}.\{b\}^*.\{a\}.L \cup \{b\}.L \cup \{\varepsilon\} = \underbrace{(\{a\}.\{b\}^*.\{a\} \cup \{b\})}_{=A}.L \cup \underbrace{\{\varepsilon\}}_{=B}.$$

D'après le lemme d'Arden ($\varepsilon \notin A$),

$$L = (\{a\}.\{b\}^*.\{a\} \cup \{b\})^*.\{\varepsilon\} = (\{a\}.\{b\}^*.\{a\} \cup \{b\})^*,$$

donc L est dénoté par l'expression rationnelle $(ab^*a + b)^*$.

Exercice 3 (Racine carrée d'un langage)

1. (a) $\sqrt{L} = \varnothing$.
   (b) $\sqrt{L} = \{a\}$.
   (c) $\sqrt{L} = L$.
2. (a) Soit $u \in L$. Comme $u^2 \in L^2$, $u \in \sqrt{L^2}$. Donc $L \subset \sqrt{L^2}$.
   (b) Si $L = \{\varepsilon, aa\}$, alors $L^2 = \{\varepsilon, aa, aaaa\}$ et donc $\sqrt{L^2} = \{\varepsilon, a, aa\} \neq L$.
