Interrogation 5 du Lundi 19 Janvier

Exercice 1 (Du cours)

1. Soient L_1, L_2 et L_3 trois langages. Montrer les égalités suivantes :
   (a) $(L_1 \cup L_2).L_3 = (L_1.L_3) \cup (L_2.L_3)$
   (b) $(L_2.L_1)^*.L_2 = L_2.(L_1.L_2)^*$
2. Donner une expression rationnelle correspondant à chacun des langages suivants, décrits en français.
   (a) Les mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ contenant au moins un a.
   (b) Les mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ comportant exactement trois b.
   (c) Les mots sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ où chaque a est directement suivi d'un b et se terminant par c.
   (d) Les mots sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ où chaque pair de b est séparée par exactement 2 caractères.
3. Déterminer si les langages suivants sont des langages locaux. Justifier.
   (a) Le langage L_1 dénoté par $(a + b)^*c$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.
   (b) Le langage L_2 dénoté par $a^*(ab)^*$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
4. Démontrer que toute expression rationnelle linéaire dénote un langage local.

Exercice 2 (Lemme d'Arden)

1. Soit Σ un alphabet quelconque et A et B deux langages sur Σ.
   On note (E) l'équation $L = (A.L) \cup B$ d'inconnue le langage $L \subset \Sigma^*$.
   (a) Montrer que $L = A^*B$ est solution de (E).
   (b) Soit L une solution de (E). Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$L = A^{n+1}L \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A^k B \right).$$
   (c) En déduire que, si $\varepsilon \notin A$, alors $L = A^*B$ est l'unique solution de (E).
2. Considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On cherche à décrire le langage L sur Σ constitué des mots contenant un nombre pair de a.
   On note L' le langage sur Σ constitué des mots contenant un nombre impair de a.
   (a) Montrer que $L' = \{a\}.L \cup \{b\}.L'$.
   (b) En déduire à l'aide du lemme d'Arden L' en fonction de L.
   (c) Exprimer L en fonction de L et de L'.
   (d) Toujours à l'aide du lemme d'Arden, en déduire une expression rationnelle qui dénote L.

Exercice 3 (Racine carrée d'un langage)

Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. On pose :

$$\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u.u \in L\}.$$

1. Considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Donner sans justification $\sqrt{L}$ lorsque :
   (a) $L = \{a\}.\{b\}^*$,
   (b) $L = \{a\}.\{b\}^*.\{a\}$,
   (c) $L = \{a.b\}^*$.
2. (a) Montrer que $L \subset \sqrt{L^2}$.
   (b) Donner un contre-exemple pour l'inclusion réciproque.