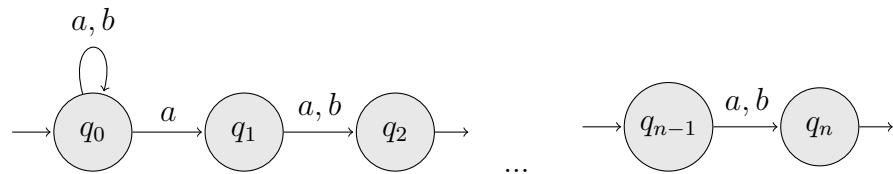


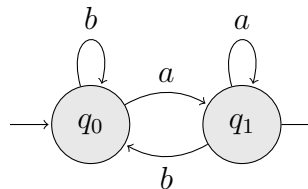
Correction de l'Interrogation du Lundi 2 Mars

Exercice 1

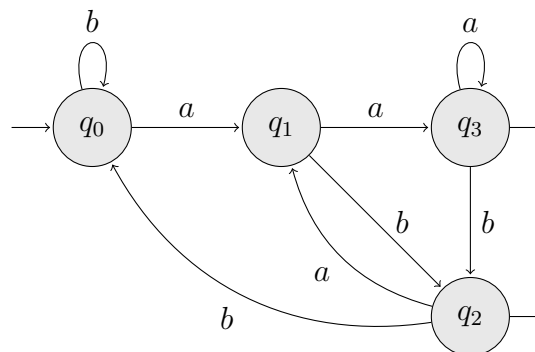
1. (a) L_n est le langage des mots $m = m_1 \dots m_k$ de longueur $k \geq n$ et tel que $m_{k-n+1} = a$ (c'est-à-dire ayant la lettre a en n -ième position en comptant à partir de la fin du mot et en remontant vers le début du mot).
- (b) Voici un automate non déterministe à $n + 1$ états reconnaissant le langage L_n :



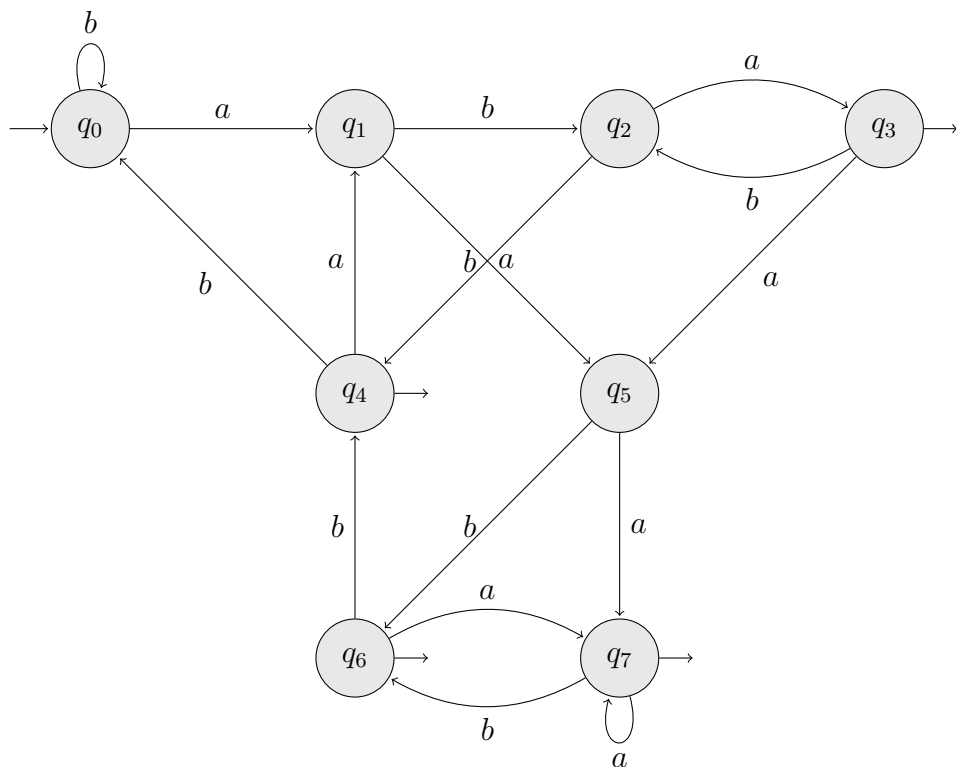
- (c) Voici un automate déterministe reconnaissant le langage L_1 (obtenu à partir de l'automate précédent en le déterminisant) :



Voici un automate déterministe reconnaissant le langage L_2 (obtenu à partir de l'automate précédent en le déterminisant) :



Voici un automate déterministe reconnaissant le langage L_3 (obtenu à partir de l'automate précédent en le déterminisant) :



2. (a) Pour tout mot w , on a :

$$\delta^*(q_0, uw) = \delta^*(\delta^*(q_0, u), w) = \delta^*(\delta^*(q_0, v), w) = \delta^*(q_0, vw).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} uw \in L_n &\Leftrightarrow \delta^*(q_0, uw) \text{ est un état acceptant de } D_n \\ &\Leftrightarrow \delta^*(q_0, vw) \text{ est un état acceptant de } D_n \\ &\Leftrightarrow vw \in L_n \end{aligned}$$

- (b) Par l'absurde, supposons que D_n a strictement moins de 2^n états.

Par le principe des tiroirs, il existe deux mots $u \neq v$ de n lettres qui amènent dans le même état, c'est-à-dire tels que $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.

Comme $u \neq v$, il existe un mot w (le plus grand suffixe commun à u et v) tel que

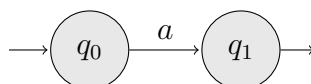
$$u = u'aw \quad \text{et} \quad v = v'bw.$$

Comme $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$ et $ua^{n-1-|w|} \in L_n$, on a avec la question précédente que $va^{n-1-|w|} \in L_n$. Ce qui est faux !

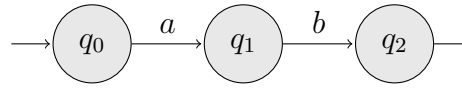
Donc D_n possède au moins 2^n états.

Exercice 2

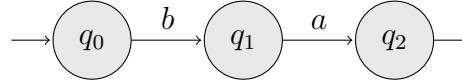
1. (a) Voici les automates reconnaissant l'expression a :



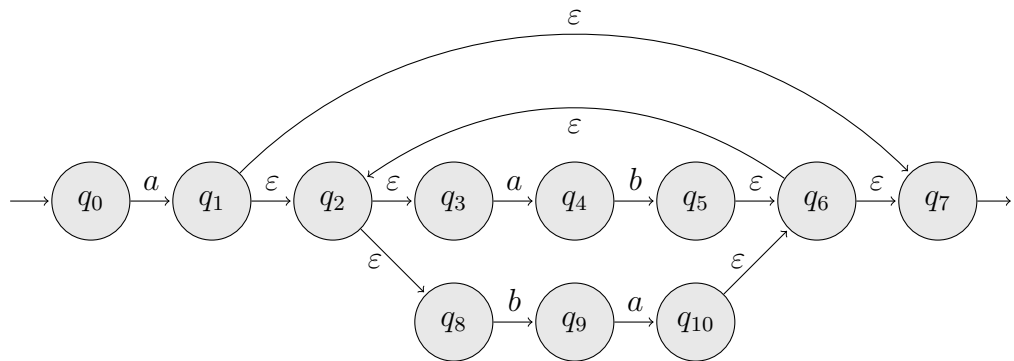
l'expression ab :



et l'expression ba :



(b) Voici l'automate de Thomson associé à $a(ab + ba)^*$:

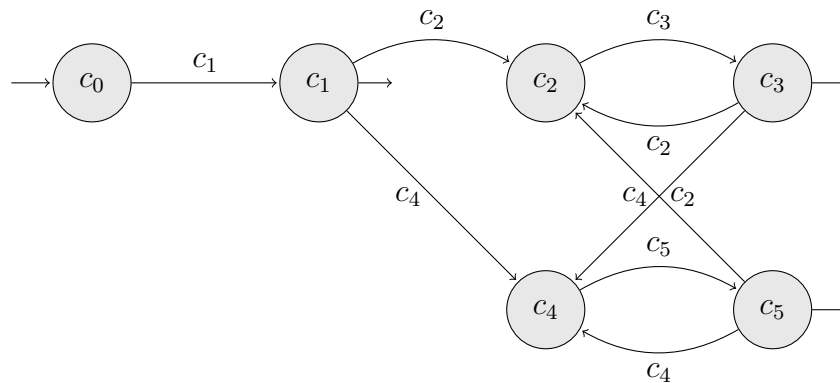


2. (a) On linéarise $a(ab + ba)^*$ en $c_1(c_2c_3 + c_4c_5)^*$.

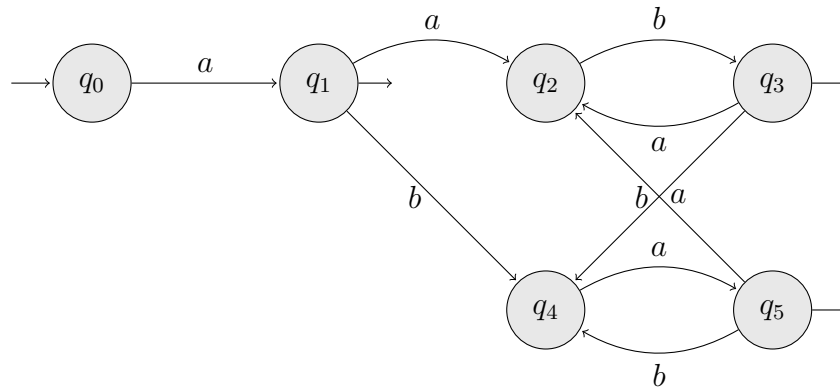
(b) Nous calculons :

$$P = \{c_1\}, \quad S = \{c_1, c_3, c_5\}, \quad F = \{c_1c_2, c_1c_4, c_2c_3, c_3c_2, c_4c_5, c_5c_4, c_5c_2, c_3c_4\}.$$

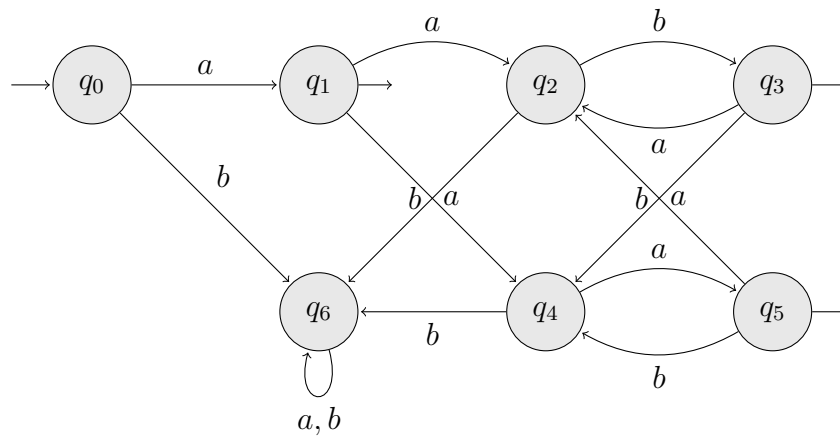
(c) Voici l'automate local associé :



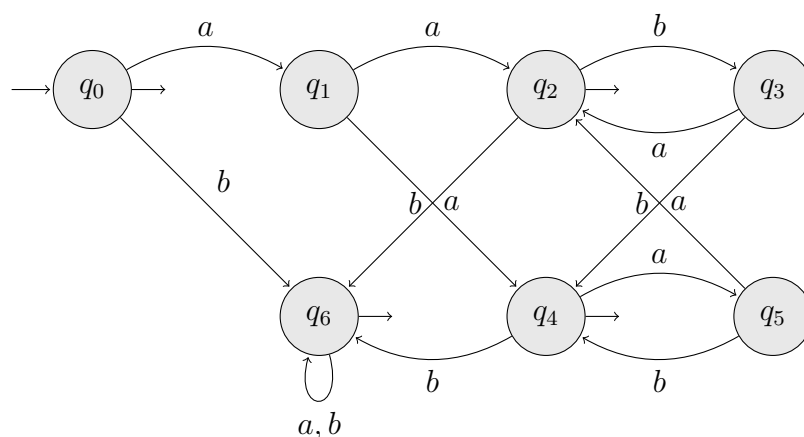
(d) Et enfin l'automate de Glushkov associé à $a(ab + ba)^*$:



3. (a) Voici la version complète :



(b) On obtient un automate reconnaissant $\bar{L}$ en prenant celui de la question précédente reconnaissant L et en échangeant les états acceptants et non acceptants. Cela donne :



Exercice 3

- (a) L'automate possède un unique état initial et pour chaque état q , il existe exactement une transition partant de q et d'étiquette a (resp. b) : l'automate est donc déterministe complet.

- (b) Le mot w_0 est l'étiquette du chemin réussi :

$$q_0 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_4 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_4$$

- (c) Les mots $x = a$, $y = abb$ et $z = babbaa$ conviennent : on a bien $w_0 = xyz$, $|xy| = 4 \leq 5$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^n z \in L_0$ pour tout n , puisque ce mot est l'étiquette du chemin réussi :

$$0 \xrightarrow{x} q_2 \xrightarrow[y]{\underbrace{q_2 \dots q_2}_{n \text{ fois}}} q_2 \xrightarrow{z} q_4$$

2. (a) $w = a_1 \dots a_n$ est dans L , donc il est associé au chemin

$$q_0 = e_0 \xrightarrow{a_1} e_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} e_n,$$

avec e_n un état final. Comme $n \geq N$, les $N + 1$ états $e_0, e_1, \dots, e_N$ ne peuvent être tous distincts (A ne possède que N états distincts). Il existe donc deux entiers i et j tels que $0 \leq i < j \leq N$ et $e_i = e_j$.

Posons alors $q_1 = e_i = e_j$, $x = a_1 \dots a_i$, $y = a_{i+1} \dots a_j$ et $z = a_{j+1} \dots a_n$. Nous avons $w = xyz$, $|xy| = j \leq N$, $|y| = j - i \neq 0$, $q_0.x = q_1$ et $q_1.y = e_i.y = e_j = q_1$.

- (b) Si L est un langage rationnel, il est aussi reconnaissable par un automate (théorème de Kleene). Soit donc A un automate déterministe complet reconnaissant L et N le nombre d'état de A . Soit $w \in L$ de longueur supérieure ou égale à N et q_1, x, y et z les éléments obtenus à la question précédente. Nous avons alors $w = xyz$, $|xy| \leq N$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^n z \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque

$$q_0.(xy^n z) = (q_0.x).(y^n z) = (q_1.y^n).z = q_1.z = e_n$$

est un état final. L vérifie donc la propriété de l'étoile.

3. Montrons par l'absurde que X ne vérifie pas la propriété de l'étoile (il ne sera donc pas rationnel, par contraposée du résultat précédent).

Supposons donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant la condition caractéristique de la propriété de l'étoile et soit $w = a^N b^N$. Comme $|w| \geq N$ et $w \in X$, il existe x, y, z tels que $w = xyz$, $|xy| \leq N$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^n z \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La condition $|xy| \leq N$ impose que $xy = a^{i+j}$, avec $i = |x|$ et $j = |y|$. On a alors $xz \in X$, ce qui est absurde car $xz = a^{N-j} b^N$ avec $N - j < N$ (puisque y n'est pas le mot vide).