

Interrogation du Lundi 2 Mars

Exercice 1

Dans cet exercice, on se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Considérons le langage L_n dénoté par l'expression rationnelle $(a + b)^* a (a + b)^{n-1}$.

1.
 - (a) Donner une description en français de L_n .
 - (b) Donner un automate non déterministe à $n + 1$ états reconnaissant le langage L_n .
 - (c) Donner trois automates déterministes reconnaissant respectivement les langages L_1 , L_2 et L_3 .
2. On suppose maintenant qu'on a un automate fini déterministe D_n qui reconnaît le langage L_n . On note δ^* sa fonction de transition étendue aux mots et q_0 son état initial.
 - (a) Soient deux mots u et v tels que $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$. Montrer que pour tout mot w , on a :

$$uw \in L_n \Leftrightarrow vw \in L_n.$$

- (b) En déduire que D_n a au moins 2^n états.

Exercice 2

On considère le langage L sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ dénoté par l'expression $a(ab + ba)^*$.

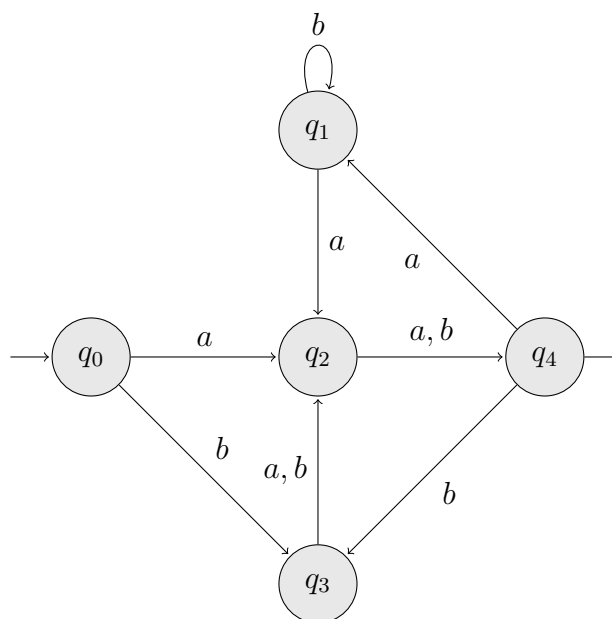
1. Construction de l'automate de Thomson.
 - (a) Construire des automates associés à chacune de expressions rationnelles a , ab et ba .
 - (b) En déduire l'automate de Thomson associé à $a(ab + ba)^*$ (construit à l'aide d' ε -transitions).
2. Construction de l'automate de Glushkov.
 - (a) Linéariser l'expression $a(ab + ba)^*$.
 - (b) Calculer les ensembles P , S et F définissant le langage local associé.
 - (c) Construire l'automate local associé.
 - (d) En déduire l'automate de Glushkov associé à $a(ab + ba)^*$.
3. Construction d'un automate reconnaissant $\overline{L}$ (le complémentaire de L dans Σ^*).
 - (a) Compléter l'automate.
 - (b) En déduire un automate qui reconnaît $\overline{L}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On note ε le mot vide, $|w|$ la longueur du mot w . Étant donné un automate A , et deux états q et q' de A , on note $q \xrightarrow{w} q'$ le fait qu'il existe un chemin dans A , qui part de l'état q et arrive dans l'état q' , étiqueté par le mot w . De plus, étant donné un mot y sur l'alphabet Σ , on définit le langage y^* par $y^* = \{y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On remarque que $\varepsilon = y^0 \in y^*$.

Enfin, on dit qu'un langage L satisfait la propriété de l'étoile si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout mot $w \in L$ tel que $|w| \geq N$, il existe trois mots x, y et z tels que $w = xyz$, $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq N$ et $xy^*z \subset L$.

1. On considère l'automate suivant, et on appelle L_0 le langage qu'il reconnaît :



Soit $w_0 = aabbbabbaa$.

- (a) Justifier que l'automate est déterministe complet.
 - (b) Indiquer le chemin parcouru dans l'automate pour reconnaître w_0 .
 - (c) Démontrer qu'il existe 3 mots x, y et z tels que $|xy| \leq 5$, $y \neq \varepsilon$, $w_0 = xyz$ et $xy^*z \subset L_0$. Vous donnerez une valeur de (x, y, z) qui convient.
2. (a) On considère un langage L reconnu par un automate fini déterministe complet A ayant N états et d'état initial q_0 . Soit un mot w dans L tel que $|w| \geq N$.
Démontrer qu'il existe un état q_1 et 3 mots x, y et z tels que $xyz = w$, $y \neq \varepsilon$, $q_0 \xrightarrow{x} q_1 \xrightarrow{y} q_1$ et $|xy| \leq N$.
 - (b) En déduire que tout langage rationnel satisfait la propriété de l'étoile.
3. Le langage $X = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il rationnel ?