

Correction de l'Interrogation du Lundi ?? Mars

Exercice 1 (Dédution naturelle)

1.

$$\frac{\frac{\frac{}{p \vdash p}(\text{ax})}{p, \neg p \vdash p}(\text{aff}) \quad \frac{\frac{}{\neg p \vdash \neg p}(\text{ax})}{p, \neg p \vdash \neg p}(\text{aff})}{p, \neg p \vdash \perp}(\neg_e)}{\frac{}{p \vdash \neg \neg p}(\neg_i)}{\vdash p \rightarrow \neg \neg p}(\rightarrow_i)}$$

2.

$$\frac{\frac{\frac{}{p \vdash p}(\text{ax})}{p \rightarrow q, p \vdash p}(\text{aff}) \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q}(\text{ax})}{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q}(\text{aff})}{p \rightarrow q, p \vdash q}(\rightarrow_e) \quad \frac{\frac{}{\neg q \vdash \neg q}(\text{ax})}{p \rightarrow q, \neg q, p \vdash \neg q}(\text{aff})}{p \rightarrow q, \neg q, p \vdash \perp}(\neg_e)}{\frac{}{p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p}(\neg_i)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)}(\rightarrow_i)}$$

3.

$$\frac{\frac{\frac{}{p \vdash p}(\text{ax})}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash p}(\text{aff}) \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q}(\text{ax})}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash p \rightarrow q}(\text{aff})}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash q}(\rightarrow_e) \quad \frac{\frac{}{q \rightarrow r \vdash q \rightarrow r}(\text{ax})}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash q \rightarrow r}(\text{aff})}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r}(\rightarrow_e)}{\vdash p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r}(\rightarrow_i)$$

4.

$$\frac{\frac{\frac{}{p \wedge q \vdash p \wedge q}(\text{ax})}{p \wedge q \vdash p}(\wedge^1_e) \quad \frac{\frac{}{p \wedge q \vdash p \wedge q}(\text{ax})}{p \wedge q \vdash q}(\wedge^2_e)}{\frac{}{p \wedge q \vdash p \wedge (\neg p \vee \neg q)}(\wedge_i)}{\vdash (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge (\neg p \vee \neg q))}(\rightarrow_i)}$$

Exercice 2 (Backtracking)

1. (a) Si $a = \top$, la clause contenant a est donc vraie, et donc disparaît. Et celle contenant \bar{a} ne dépend que du reste. On trouve donc :

$$F(\top, b, c, d) = bc, \bar{b}c, \bar{c}\bar{d}, \bar{c}d.$$

- (b) Si $a = \perp$, la clause contenant \bar{a} est donc vraie, et donc disparaît. Et celle contenant a ne dépend que du reste. On trouve donc :

$$F(\perp, b, c, d) = bc, \bar{c}\bar{d}, d.$$

(c) /

2. /

```

3. (a) let rec positive exp = match exp with
      | [] -> []
      | t::q -> match t with
          | [] -> positive q
          | 0::r -> r::(positive q)
          | 1::r -> positive q
          | (-1)::r -> r::(positive q)
      ;;

```

```

(b) let rec negative exp = match exp with
      | [] -> []
      | t::q -> match t with
          | [] -> negative q
          | 0::r -> r::(negative q)
          | (-1)::r -> negative q
          | 1::r -> r::(negative q)
      ;;

```

(c) On suppose ici que l'expression ne possède qu'une variable.

```

let solution exp =
  let rec aux exp = match exp with
    | [] -> (true,0)
    | []::[] -> (false,0)
    | [0]::[] -> (false,0)
    | [0]::q -> aux q
    | [1]::q -> let (b,v) = aux q in
                  if ((v=1)||v=0)&&b then (true,1)
                  else (false,0)
    | [-1]::q -> let (b,v) = aux q in
                  if ((v=-1)||v=0)&&b then (true,-1)
                  else (false,0)
  in
  let (b,i) = aux exp in b
;;

```

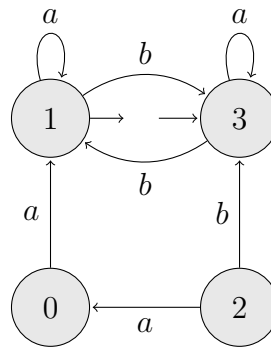
```

(d) let rec recherche_sat exp =
      if exp = [] then true
      else
        if List.length (List.hd exp) = 1 then solution exp
        else (recherche_sat (positive exp))||(recherche_sat (negative exp))
      ;;

```

Exercice 3 (Théorie des automates et des langages rationnels)

1. $\sqrt{L} = a^* + b^*$.
2. $\sqrt{L} = a^* + b^*$.
3. Voici l'automate demandé :

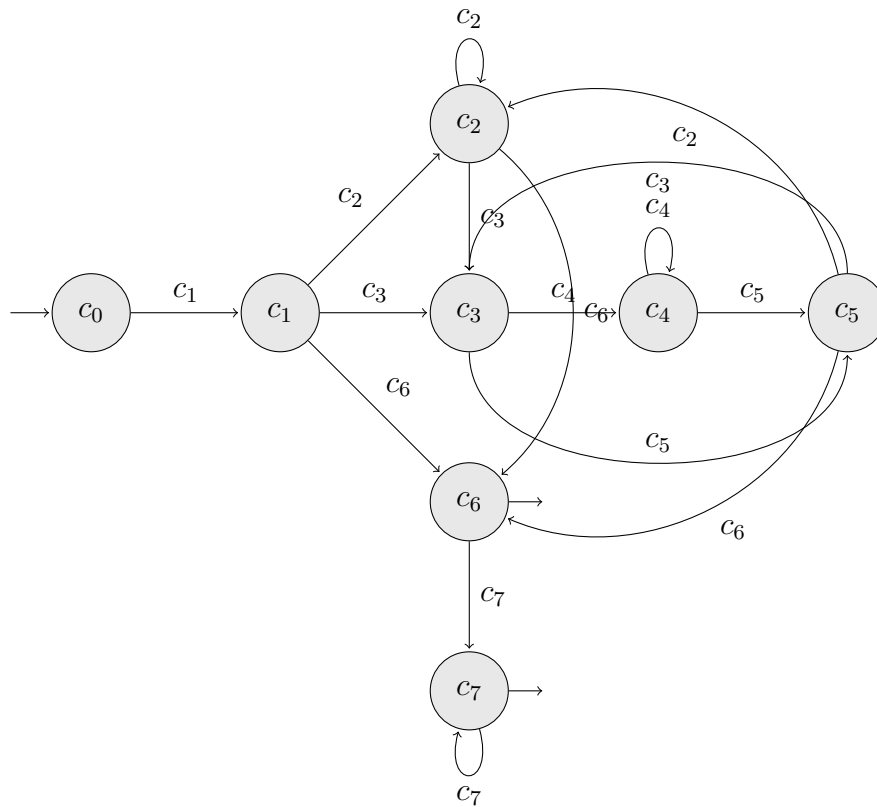


4. L' est décrit par $c_1(c_2 + c_3c_4^*c_5)^*c_6c_7^*$.

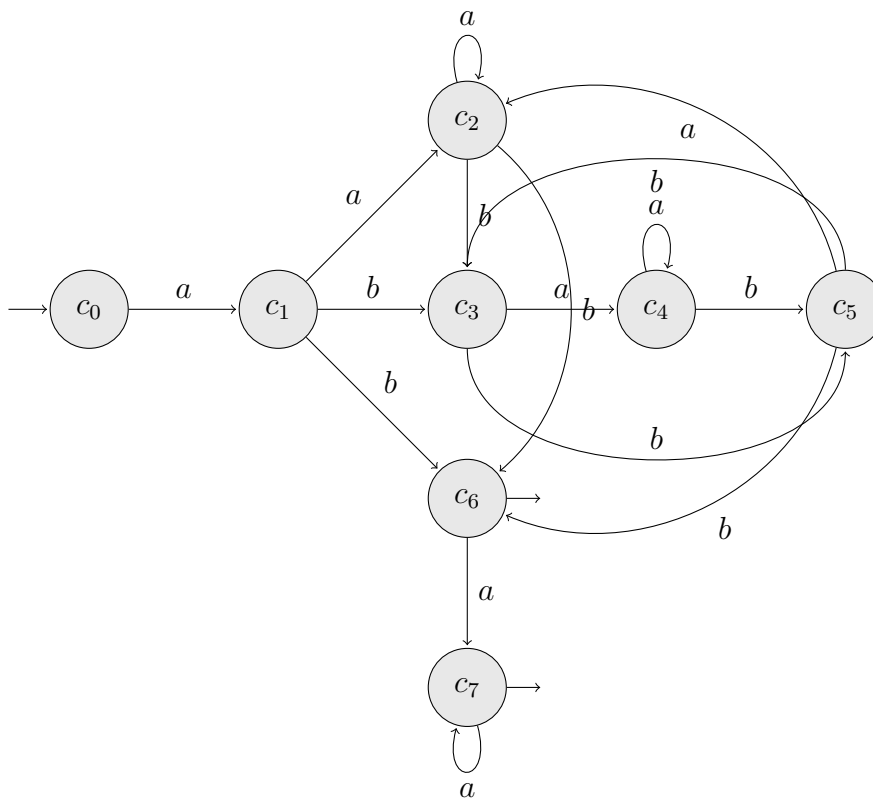
On a alors $P = \{c_1\}$, $S = \{c_6, c_7\}$ et

$$F = \{c_1c_2, c_1c_3, c_2c_3, c_5c_2, c_3c_4, c_4c_4, c_3c_5, c_4c_5, c_2c_2, c_5c_3, c_1c_6, c_6c_7, c_7c_7, c_2c_6, c_5c_6\}.$$

On en déduit l'automate :



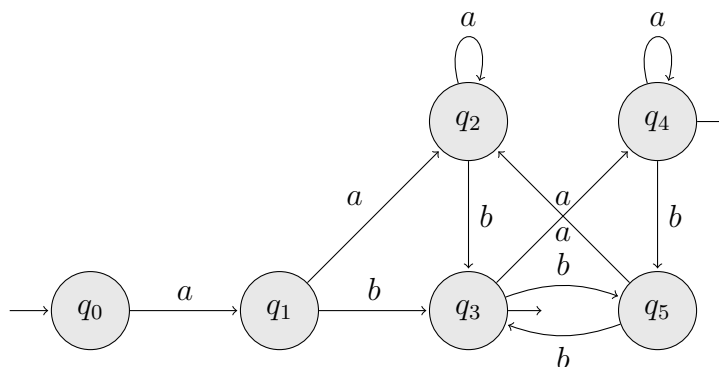
puis l'automate G de L :



5. Avec l'automate des parties :

	<i>a</i>	<i>b</i>
$q_0 = \{c_0\}$	$\{c_1\}$	
$q_1 = \{c_1\}$	$\{c_2\}$	$\{c_3, c_6\}$
$q_2 = \{c_2\}$	$\{c_2\}$	$\{c_3, c_6\}$
$q_3 = \{c_3, c_6\}$	$\{c_4, c_7\}$	$\{c_5\}$
$q_4 = \{c_4, c_7\}$	$\{c_4, c_7\}$	$\{c_5\}$
$q_5 = \{c_5\}$	$\{c_2\}$	$\{c_3, c_6\}$

et on obtient :



6. On a :

$$\begin{aligned}
 u \in \sqrt{L} &\Leftrightarrow uu \in L \\
 &\Leftrightarrow uu \text{ est reconnu par } A \\
 &\Leftrightarrow \delta^*(q_0, uu) \in F \\
 &\Leftrightarrow \delta^*(\delta^*(q_0, u), u) \in F \\
 &\Leftrightarrow \exists q \in Q, q = \delta^*(q_0, u) \text{ et } \delta^*(q, u) \in F \\
 &\Leftrightarrow \exists q \in Q, u \in L_{q_0, \{q\}} \text{ et } u \in L_{q, F}
 \end{aligned}$$

7. On a avec la question précédente :

$$\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q, u \in L_{q_0, \{q\}} \text{ et } u \in L_{q, F}\} = \bigcup_{q \in Q} (L_{q_0, \{q\}} \cap L_{q, F}).$$

Comme $L_{q_0, \{q\}}$ et $L_{q, F}$ sont rationnels pour tout $q \in Q$ et que l'intersection et l'union de langages rationnels est rationnel, \sqrt{L} est donc rationnel.

8. Si $m \in \sqrt{L} \odot \sqrt{L}$ alors $m = uu$ avec $u \in \sqrt{L}$ et donc $m \in L$. Donc $\sqrt{L} \odot \sqrt{L} \subset L$.
L'inclusion réciproque est fautive : si $L = \{a, b\}$, $\sqrt{L} = \emptyset$, $\sqrt{L} \odot \sqrt{L} = \emptyset$ et donc $L \not\subset \sqrt{L} \odot \sqrt{L}$.
-