Semaine 21

Lois à densité usuelles - Équations différentielles

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 13 - Lois à densité usuelles

Loi uniforme

- Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
- Transformées affines d'une loi uniforme.

Loi exponentielle

- Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.

Loi normale centrée réduite

- Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition, espérance et variance.

Loi normale

- Loi normale : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
- Transformées affines d'une loi normale. Stabilité par somme des lois normales.

Chapitre 14 - Équations différentielles

Équations différentielles linéaires

- Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n. Équation homogène associée.

  Principe de superposition. Structure algébrique de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

  Trajectoires d'une équation différentielle. Trajectoires d'équilibre. Trajectoires convergentes. Si une trajectoire converge, c'est nécessairement vers une trajectoire d'équilibre.
- Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1. Solution de l'équation homogène. Solution de l'équation générale. Résolution avec une condition initiale.
- Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. Solution de l'équation homogène (en utilisant l'équation caractéristique associée). Solution de l'équation générale. Résolution avec des conditions initiales.

Systèmes différentiels linéaires

- Système différentiel linéaire à coefficients constants. Écriture matricielle.
- Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

  Résolution dans le cas où la matrice associée est diagonalisable.
- Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel.

- Trajectoires d'un système différentiel linéaire. États d'équilibre. Trajectoires convergentes. Lien avec le spectre de la matrice associée au système différentiel. Cas particulier où $n = 2$.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
- Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Rightarrow \quad Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]).$$

- Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \text{et} \qquad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes) et $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i.

  Alors l'ensemble des solutions du systèmes différentiel linéaire $X' = AX$ est :

$$S = \left\{ t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} U_1 + \ldots + \lambda_n e^{\alpha_n t} U_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Prochain programme : *Équations différentielles - Convergence et approximation*