TD 7

Chaînes de Markov

Théorie des graphes

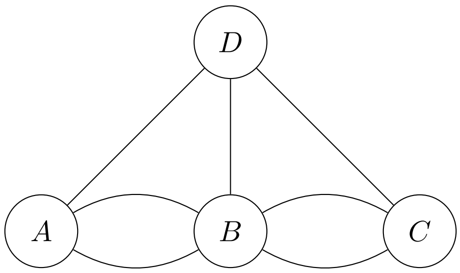
Exercice 1 (★)

Une maison, construite sur un niveau possède 18 ouvertures (portes ou fenêtres) et chaque pièce a 2 ouvertures sur l'extérieur et 2 autres sur l'intérieur.

Combien de pièces cette maison possède-t-elle ?

Exercice 2 (★)

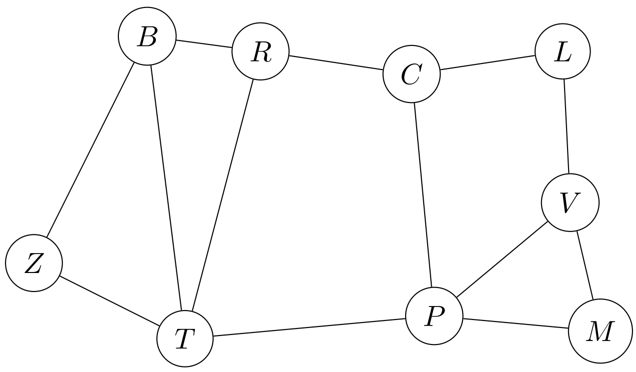
Dans la ville de Königsberg, il y a 7 ponts reliant 4 parties de la ville que l'on notera A, B, C et D. On modélise la situation par le graphe suivant (chaque arête désignant un pont) :



1. Est-il possible de se promener dans cette ville en parcourant tous les ponts une et une seule fois ?
2. Est-il possible de se promener dans cette ville en parcourant tous les ponts exactement deux fois, une fois dans un sens et une fois dans l'autre ?

Exercice 3 (★)

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



1. (a) Déterminer l'ordre de ce graphe.
   (b) Ce graphe est-il connexe ?
   (c) Ce graphe est-il complet ?
2. (a) Déterminer le degré de chaque sommet.
   (b) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Un cycle eulérien ?

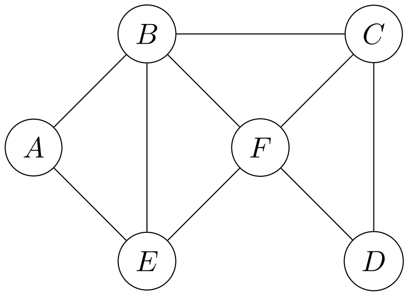
3. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.

   Déterminer s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute. Donner un parcours possible.

Exercice 4 (★★)
L'algorithme d'Euler consiste à déterminer dans n'importe quel graphe connexe une chaîne eulérienne. Il s'articule en quatre temps :

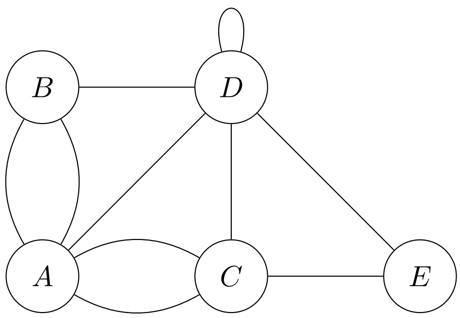
- Créer une chaîne simple entre deux sommets de degré impair ;
- Tant que toutes les arêtes du graphe n'ont pas été utilisées, choisir un sommet quelconque de la chaîne précédente et trouver un cycle associé ne contenant aucune des arêtes déjà utilisées ;
- Insérer ce cycle en remplacement du sommet choisi à l'étape précédente ;
- Recommencer ainsi de suite jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes.

On considère le graphe G suivant :



1. Le graphe G est-il connexe ?
2. (a) Montrer que G possède au moins une chaîne eulérienne.
   (b) Donner les deux seules extrémités possibles de cette chaîne.
3. (a) Mettre en place l'algorithme d'Euler en partant de la chaîne simple $E - F - D - C$.
   (b) Déterminer une autre chaîne eulérienne en partant de $E - B - C$.

Exercice 5 (★)
Cinq étudiants de Clemenceau habitent Reims mais en des lieux distincts que l'on représentera par des sommets A, B, C, D et E. Ils décident de s'entrainer pour le Run in Reims.
La situation géographique est modélisée par le graphe G ci-dessous :



Pour faciliter les calculs, on suppose que chaque arête mesure $2,5$ km.

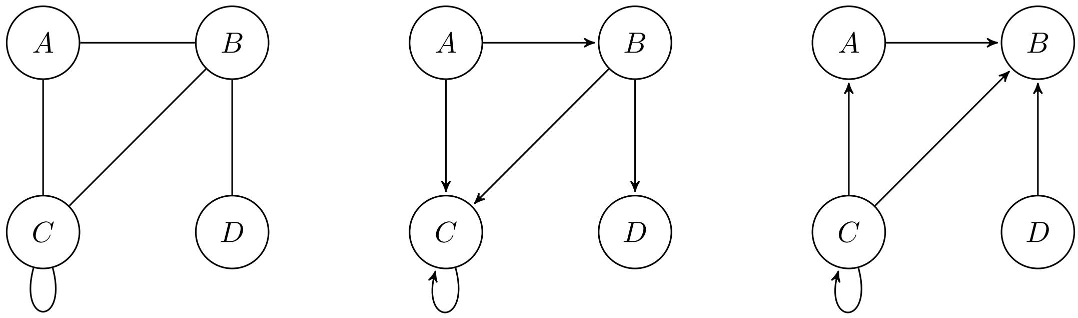
1. Écrire la matrice d'adjacence M de G.

2. Expliquer comment, à l'aide de cette matrice, on peut trouver l'étudiant qui peut rendre visite au plus grand nombre d'amis en ne parcourant que $2,5$ km.

3. On donne :
$$M^4 = \begin{pmatrix} 117 & 37 & 43 & 83 & 45 \\ 37 & 61 & 69 & 57 & 21 \\ 43 & 69 & 79 & 66 & 24 \\ 83 & 57 & 66 & 79 & 36 \\ 45 & 21 & 24 & 36 & 19 \end{pmatrix}.$$
   (a) Combien l'étudiant qui habite en A peut-il faire de boucles différentes de 10 km pour s'entrainer ?
   (b) Quel étudiant dispose du plus faible nombre de boucles de 10 km ?

Exercice 6 (★)

On considère les graphes suivants :



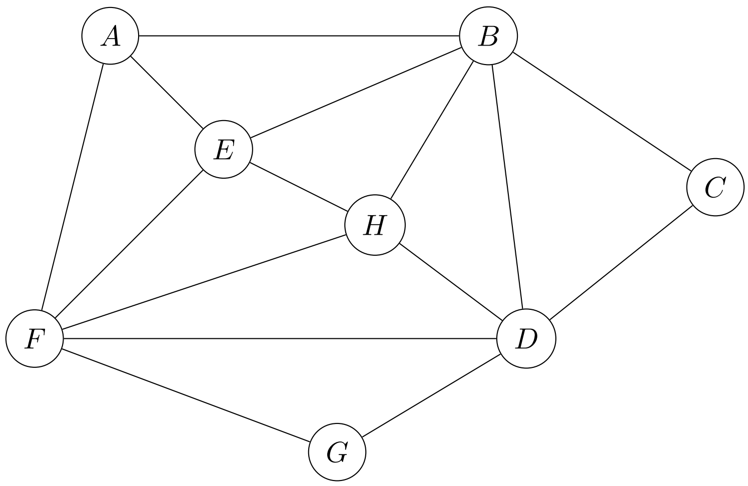
G_1 G_2 G_3

Pour chacun de ces graphes :

1. Déterminer la matrice d'adjacence M associée.
2. Calculer M^2 et M^3. En déduire le nombre de chemins de longueur 3 entre B et C.
3. Après avoir calculé la matrice $I_4 + M + M^2 + M^3$, déterminer si le graphe est connexe.

Exercice 7 (★★)

Une coopérative fruitière collecte du lait dans 7 exploitations. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous. La coopérative est située sur le sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations et les arêtes représentent le réseau routier réliant ces exploitations.



Notons enfin M la matrice d'adjacence associée.

1. Montrer que ce graphe est connexe.

2. Ce graphe est-il complet ?

3. Sans la construire, justifier que chaque ligne et chaque colonne de M a au moins trois coefficients nuls.

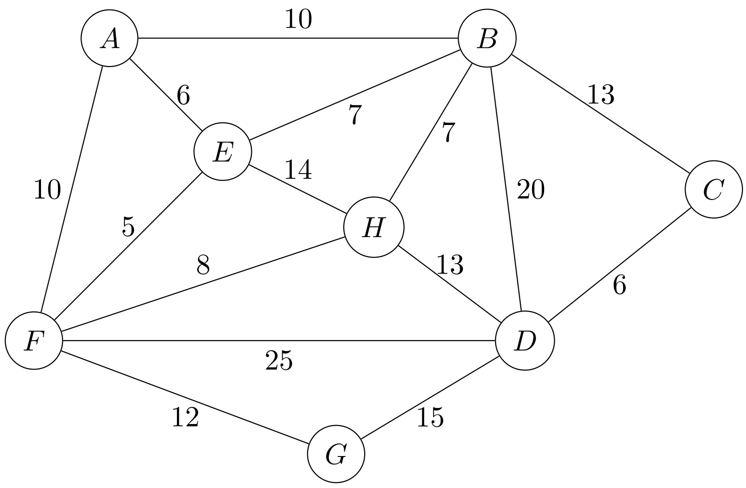
4. La matrice M^2 a-t-elle des coefficients nuls ?

5. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer le nombre de chemins de A à H de longueur 3.

6. On reprend le graphe en le pondérant :



   Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin le plus court pour aller du point A au point D.

Chaînes de Markov

Exercice 8 (★)

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets d'un carré $ABCD$. A chaque instant, il est soit en A, soit en B, soit en C, soit en D.

Les règles de ce "voyage" sont les suivantes :

- Le mobile est en A à l'instant 0.
- Si à l'instant n le mobile est en A, alors à l'instant $(n+1)$, il sera en B.
- Si à l'instant n le mobile est en B, alors à l'instant $(n+1)$, il sera soit en A, soit en C et ceci de façon équiprobable.

- Si à l'instant n le mobile est en C, alors à l'instant $(n+1)$, il sera soit en B, soit en D et ceci de façon équiprobable.
- Si à l'instant n le mobile est en D, alors il est certain qu'à l'instant $(n+1)$ il sera encore en D.

Quand le mobile est en A (respectivement B, C, D), on dit qu'il est dans l'état 1 (respectivement dans l'état 2, dans l'état 3, dans l'état 4).

1. Construire le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.
2. Déterminer la matrice de transition associée.
3. Compte tenu des règles de déplacement, trouver sans calcul un état stable de cette chaîne. Vérifier ensuite par le calcul.

Exercice 9 (★★)
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :

- Le mobile se trouve sur le point A à l'instant 0.
- Si à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité $\frac{2}{3}$, soit il se déplace sur l'un des deux autres sommets de façon équiprobable.

On note 1 l'état correspondant au sommet A, 2 celui correspondant à B et 3 celui correspondant à C.

1. (a) Dessiner le graphe probabiliste associé à cette chaîne.
   (b) Définir la matrice de transition M.
2. (a) Diagonaliser la matrice M.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de M^n.
3. (a) Pour tout entier naturel n, déterminer le n-ième état probabiliste U_n.
   (b) Montrer que les composantes de U_n ont toutes pour limite $\frac{1}{3}$.
   (c) Vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable.

Exercice 10 (★★)
On suppose que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à trois états notés $1, 2, 3$.

1. Construire le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = P(X_n = 1)$, $b_n = P(X_n = 2)$ et $c_n = P(X_n = 3)$ et on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix})$ le n-ième état probabiliste.
   On suppose que $X_0 = 2$. On a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -\frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3}$.

(c) En déduire le n-ième état probabiliste.

(d) Déterminer l'espérance de X_n. Était-elle prévisible ?

Exercice 11 (★★)

Une entreprise reçoit le jour 0 deux machines identiques fonctionnant de manière indépendante. Le fournisseur garantit à l'entreprise que l'une au moins des machines est en état de marche mais elles peuvent tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \dfrac{1}{4}$.

On suppose que si une machine est en panne (soit à la livraison, soit au cours d'une journée), elle est réparée dans la nuit suivante mais on ne peut réparer qu'une seule machine par nuit. On note X_n le nombre de machines en fonction le jour n. On définit ainsi une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Préciser le nombre d'états de cette chaîne et représenter le graphe probabiliste associé.
2. Définir la matrice de transition M.
3. Déterminer quelle doit être la probabilité que les deux machines livrées soient en état de marche afin que les variables X_n suivent toutes la même loi.

Exercice 12 (★★)

Un individu se déplace sur les trois points A_0 d'abscisse 0, A_1 d'abscisse 1 et A_2 d'abscisse 2 selon les règles suivantes :

- A l'instant initial 0, il est au point d'abscisse 2.
- S'il est au point d'abscisse 2 à l'instant n, il est de façon équiprobable en l'un des trois points d'abscisse 0, 1 et 2 à l'instant $n+1$.
- S'il est au point d'abscisse 1 à l'instant n, il est de façon équiprobable en l'un des 2 points d'abscisse 0 ou 1 à l'instant $n+1$.
- S'il est au point d'abscisse 0 à l'instant n, il reste au point d'abscisse 0 à l'instant $n+1$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n. On définit ainsi une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $U_n = \big(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2)\big)$ le n-ième état probabiliste de cette chaîne.

1. (a) Donner la matrice de transition M et le graphe probabiliste associés à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Quel est l'unique état stable U possible pour cette chaîne de Markov ?
2. (a) Diagonaliser la matrice M.
   (b) Déterminer les coefficients de M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n \times M$.
   (b) Préciser U_0 et montrer que pour tout entier n, $U_n = U_0 \times M^n$.
   (c) En déduire $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ en fonction de n et vérifier que U_n converge bien vers l'état stable U.
   (d) Déterminer l'espérance $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. (a) En multipliant à droite par la matrice colonne $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ l'égalité matricielle $U_{n+1} = U_n \times M$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
   (b) Retrouver l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13 (★★)

On considère un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne :

- par X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des n premiers consommateurs.
- par U_n la matrice ligne suivante : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov et U_n est le n-ième état probabiliste.

1. (a) Donner la matrice de transition M et le graphe probabiliste associé à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n \times M$.
2. (a) On considère les matrices colonnes $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer deux réels α et β tels que $ML = \alpha L + \beta J$.
   (b) En multipliant l'égalité précédente par U_n à gauche, en déduire que :
   $$E(X_{n+1}) = \alpha E(X_n) + \beta.$$
   (c) Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) On suppose $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur U. Déterminer U.
   (b) Notons X la variable aléatoire associée à U. Déterminer $E(X)$.
   (c) Comment expliquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$?
